EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

Progresiones de aprendizaje

del recurso sociocognitivo

Pensamiento matemático

Leticia Ramírez Amaya
Secretaria de Educación Pública

Nora Ruvalcaba Gámez
Subsecretaria de Educación Media Superior

Silvia Aguilar Martínez
Coordinadora Sectorial de Fortalecimiento Académico

Segunda edición, 2023

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Av. Universidad 1200, Col. Xoco.
Benito Juárez, C.P. 03330, Ciudad de México (CDMX).
Distribución gratuita. Prohibida su venta.

Contenido

I. Presentación y diagnóstico

El Pensamiento Matemático se incluye dentro del nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) como un recurso sociocognitivo, con la finalidad de lograr una formación humana e integral para todas y todos los jóvenes de México.

Se concibe al pensamiento matemático de manea amplia: la matemática deja de ser únicamente un conjunto de algoritmos que muchas veces son aplicados de manera mecánica y descontextualizada, para convertirse en un medio a través del cual el estudiantado pueda trabajar en la adquisición y mejoramiento de habilidades y destrezas del pensamiento tales como observar, intuir, conjeturar, argumentar, la capacidad para modelar y entender, a través de técnicas y lenguaje matemático, algunos fenómenos sociales, naturales e incluso de su vida personal.

El pensamiento matemático entendido así apoya a las y los jóvenes en la construcción de un pensamiento flexible, crítico y creativo, el cual les será de utilidad sea cual sea el derrotero que elijan al finalizar el bachillerato, tanto si deciden continuar con sus estudios profesionales o técnicos, así como si optan por incorporarse al mercado de trabajo.

Se vuelve necesario enseñar desde un enfoque activo, poniendo a las y los estudiantes al centro del proceso de enseñanza-aprendizaje, aunado a esto la enseñanza con perspectiva socioemocional es fundamental para lograr un mejor desarrollo en ambientes de aprendizaje donde exista una confianza mutua.

El pensamiento matemático tiene un carácter transversal y comparte junto con otros recursos sociocognitivos la función de ampliar, potenciar y consolidar el conocimiento de otras áreas, sin que por ello se pierda su identidad y autonomía, así pues, se ha considerado en la propuesta el trabajo colaborativo con otros recursos y áreas de conocimiento, lo cual no sólo hace que el aprendizaje de la matemática sea más significativo para el estudiantado, sino que además le ayuda a desarrollar habilidades socioemocionales.

La forma en que se describe este recurso sociocognitivo es a través de categorías y subcategorías, las cuales son conceptualizaciones que buscan abarcar los procesos cognitivos complejos que ocurren cuando una persona participa del pensamiento matemático, así como también servirnos de orientadores didácticos en nuestra práctica docente. Las cuatro categorías que se han establecido son: Procedural, Procesos de intuición y razonamiento, Solución de problemas y modelación e Interacción y lenguaje matemático.

La propuesta pone el énfasis en las habilidades que puedan desarrollarse a través del pensamiento matemático y no tanto en el contenido, aunque también es cierto que no es posible desarrollar el pensamiento matemático sin matemáticas: es necesario construir sobre la base de algún contenido y su elección no ha sido fortuita pues se buscó que éste fuera significativo para las y los estudiantes.

La presentación curricular del pensamiento matemático se hace a través de progresiones de aprendizaje, desde esta perspectiva se asume una posición constructivista, centrada en las y los estudiantes, en la que se apela a sus experiencias y conocimientos previos, se refuerzan los mismos y se construyen de manera orgánica nuevos conocimientos y habilidades haciendo uso de la imaginación, procediendo intuitivamente y utilizando métodos heurísticos y considerando posteriormente un proceso de formalización.

En estas páginas se encontrará la propuesta de los tres primeros semestres del bachillerato de pensamiento matemático, dependerá de las necesidades de cada subsistema la forma en que se aborde la matemática o el pensamiento matemático en semestres posteriores. En estos tres primeros semestres se ha buscado cubrir lo fundamental para lograr una formación integral de un ser humano en lo que a pensamiento matemático se refiere: pensamiento estadístico y probabilístico, pensamiento aritmético, algebraico y geométrico y el pensamiento variacional.

La propuesta que se presenta en estas páginas es el resultado del trabajo colaborativo de maestras y maestros, especialistas, estudiantes y diversos actores involucrados en la educación del bachillerato.

1.1. ¿Por qué el cambio?

A continuación, se mencionan algunas situaciones actuales por las cuales el cambio se vuelve necesario.

La importancia del pensamiento matemático en la formación humana

Actualmente se enseñan matemáticas con el propósito de adquirir una serie de conocimientos y saberes que rara vez encuentran cabida en la vida del estudiantado, salvo en el caso de aquellas y aquellos egresados que optan por estudiar una carrera relacionada con el campo de las matemáticas. No se debe descuidar la adquisición de estos saberes, pero el enfoque debe ser más amplio y contemplar a la totalidad de las y los estudiantes, en otras palabras, debemos adoptar un enfoque eminentemente humanista en el que se busque que al finalizar este trayecto educativo el pensamiento matemático aporte a la formación humana de nuestras y nuestros jóvenes.

La enseñanza de la matemática con una visión limitada y poco útil

El pensamiento matemático tiene en la actualidad poca presencia en el aula donde fundamentalmente se trabaja la disciplina matemática a través de la enseñanza de operaciones más o menos complejas, en muchas ocasiones sin que éstas tengan una clara vinculación entre sí, además de aparecer descontextualizadas de la realidad. Las y los estudiantes reciben una enseñanza que busca la mecanización de procesos algorítmicos, pero se desaprovecha la oportunidad de favorecer en ellas y ellos habilidades relacionadas con el pensamiento matemático.

Bajo desempeño en matemáticas

Los resultados de la aplicación de instrumentos internacionales de medición como lo es el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), muestran que el puntaje promedio en Matemáticas, en la mayor parte de los países y economías participantes, se ubica entre 482 y 545 puntos; mientras que los resultados de las y los estudiantes mexicanos se ubican en el rango de 358 a 420 puntos, con un promedio de 409 puntos y una desviación estándar de 84 (Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación, 2020). Los resultados de PISA 2018, muestran que en matemáticas estamos 80 puntos abajo del promedio de OCDE. En lo relativo a las evaluaciones nacionales, Osuna (2020) establece que los resultados de PLANEA son desalentadores y revelan el escaso conocimiento matemático que están logrando el estudiantado de Educación Media Superior (EMS).

Los resultados de la prueba PISA y los comentarios del profesorado indican que las prácticas docentes y ejercicios asignados actualmente al estudiantado de la EMS no alcanzan el nivel argumentativo, ya que el tiempo se consume en cubrir los programas saturados de contenido.

Falta de tiempo y espacios para desarrollar el pensamiento matemático

La gran cantidad de contenidos en los temarios hacen que los temas se revisen de forma superficial y no se reflexione a mayor profundidad en aspectos importantes de los mismos; por lo regular, solo se hacen aplicaciones sencillas de lo revisado en el aula y no se justifican ni argumentan los resultados.

La reflexión, argumentación y comparación, elementos fundamentales del pensamiento matemático, tienen un mínimo espacio en las clases. Las soluciones de los ejercicios se obtienen por métodos específicos y son escasas las oportunidades para contrastar o validar las obtenidas por otro método; además ni se dan argumentos a favor o en contra de su uso.

En resumen, en la actualidad se pone un mayor énfasis en la enseñanza de contenido con el fin de cubrir un temario y no en el desarrollo de habilidades que pueden resultar de gran utilidad para la totalidad de las y los estudiantes.

El disgusto por la materia es un factor de deserción

El pensamiento matemático tiene gran utilidad en la vida fuera de la escuela, particularmente en la toma de decisiones, ya que permite comprender las leyes de las ciencias que usualmente recurren al lenguaje de la matemática para expresarse; además facilita estructurar sus teorías y también aporta procedimientos válidos y aplicables a distintos objetos matemáticos y de la realidad cotidiana, a la explicación de fenómenos o a la solución de situaciones problema de otras áreas de conocimiento o en el ámbito artístico, deportivo, social e incluso emocional. Sin embargo, la matemática, a pesar de ofrecer tanto, suele tener un rechazo considerable en el estudiantado (Peña, 2002). Dicho rechazo, en un extremo, puede ser incluso causal de deserción.

1.2. ¿Cómo se enseñaba hasta ahora? Sus deficiencias y críticas

Al analizar los planes y programas de estudio vigentes (Planes de Estudio de Referencia del MCC de la EMS, 2018) y los programas de los Subsistemas que integran la EMS, se encuentra que la Matemática está presente al menos en cuatro semestres con cuatro, cinco o seis horas semanales, en las asignaturas de las áreas de *formación básica*.

En la propuesta 2018 el pensamiento matemático es considerado un ámbito, al igual que el pensamiento crítico; también se hace referencia al pensamiento matemático como uno de los cinco campos disciplinares al que le corresponde el grupo de asignaturas: "Álgebra, Aritmética, Cálculo, Trigonometría y Estadística". En la revisión efectuada no se detecta problema por carencia de horas, por lo cual **es viable incluir el pensamiento matemático en los primeros tres semestres, si se asocia a contenidos matemáticos primordiales y se dejan otros para las matemáticas de los semestres superiores.**

Se estudian conceptos, técnicas y lenguaje específico y con ello se espera que se alcance el perfil de egreso relacionado con el pensamiento matemático, aunque esto no siempre ocurre de manera directa. Por otro lado, el enfoque basado en la solución de problemas y la enseñanza de matemáticas en contexto, declarado en el modelo educativo basado en competencias no se sostiene si no se incluyen en los programas contenidos que promuevan el desarrollo de habilidades de razonamiento, solución de problemas o modelación, además de dedicar tiempo a la reflexión que conduzca hacia la metacognición.

No se detectan del todo contenidos que brinden experiencias atractivas que transciendan y sean comprendidas por el estudiantado. Con frecuencia, el estudiantado memoriza y ejecuta procedimientos aislados que no entiende a cabalidad y no siempre los aplica en situaciones significativas, esto le provoca frustración y resistencia hacia las matemáticas, incluso, le puede conducir a abandonar la escuela, como lo menciona Miranda (2018) quien cita entre las razones del abandono, a la reprobación y a la falta de interés en los estudios.

Puede decirse que los planes y programas actuales se basan en conceptos fragmentados más que en el desarrollo del pensamiento matemático y no hay transiciones adecuadas entre los tipos de pensamiento involucrados (por ejemplo, entre pensamiento aritmético y pensamiento algebraico), lo que conduce a reducirlos a conceptos y procesos mecánicos e independientes entre sí; por otra parte, como se abordan múltiples contenidos y separados de su aplicación, el tratamiento actual en lo general resulta inadecuado.

La “forma tradicional de enseñanza de las matemáticas”, se caracteriza como refiere Merino (2016), por tener un método cerrado, en gran parte se basa en las cifras, ya que se realizan múltiples operaciones. Las operaciones y los ejemplos aritméticos son tan abundantes que el alumnado muchas veces confunde “hacer matemáticas” con “hacer cuentas”. Las operaciones se presentan como la parte más activa, pero se realizan de manera mecánica y el alumnado no entiende realmente los conceptos y los procedimientos solo intenta repetirlos. En general, se puede señalar que, en la enseñanza de la matemática bajo el enfoque tradicional, el rol del profesorado se centra en preparar y transmitir información a la comunidad estudiantil, hay poca teoría, las y los docentes explican ejemplos y el rol de las y los estudiantes es recibir y almacenar esa información, para después aplicarla de manera mecánica en ejercicios del mismo tipo.

La metodología predominante es la expositiva. Se considera que el estudiantado debe asumir un rol de receptor y que debe mantenerse atento y quieto para aprender, el eje central del aprendizaje es el libro, un cuadernillo de actividades y los apuntes. Las matemáticas enseñadas así carecen de atractivo y ejercicios interesantes, mantienen un formato más escolar que vivencial y no guardan relación con la vida diaria.

1.3. ¿Qué falta para la formación integral de las y los estudiantes?

La educación en el área de las matemáticas en la actualidad resulta poco atractiva y útil al estudiantado, esto es consecuencia de factores diversos entre los cuales destacan: un entorno social con aversión a las matemáticas, marcos curriculares con múltiples carencias, aproximaciones pedagógicas deficientes. Ante este panorama, se requieren contenidos interesantes y oportunidades de reto intelectual motivantes que pueden ser proporcionadas por el pensamiento matemático enmarcado por una adecuada práctica pedagógica, en la cual se consideren aprendizajes de trayectoria y progresiones en lugar de mantener el modelo por competencias ya que tal modelo parcializa el proceso en competencias más elementales cuya unión simple no siempre construye la competencia disciplinar deseada. Falta también enfatizar en el estudiantado el desarrollo de elementos como los siguientes:

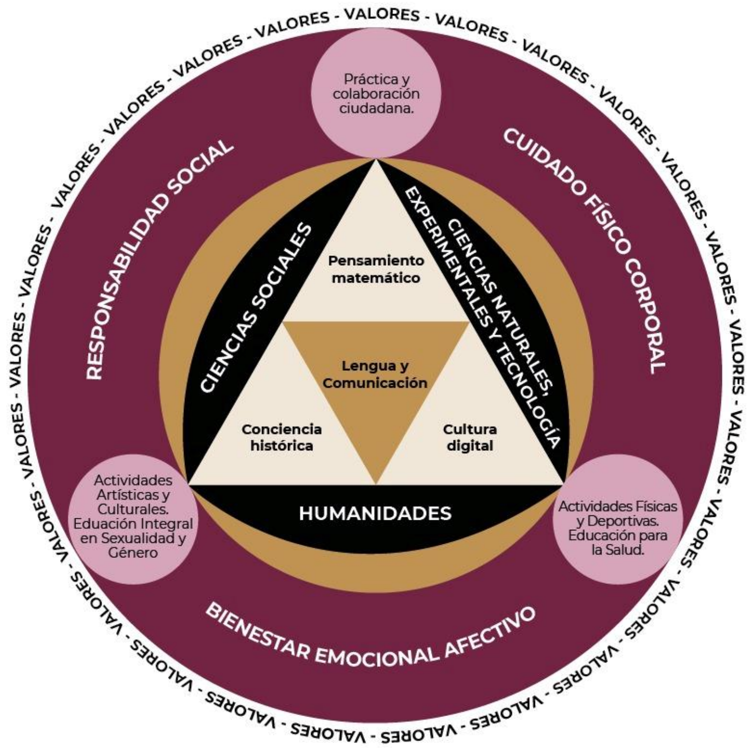
- **Actitud positiva y crítica**, con iniciativa, curiosidad e interés.
- **Perseverancia** para enfrentarse a problemas y retos intelectuales.
- **Capacidad de trabajo autónomo** e independiente para explorar procedimientos alternativos, heurísticas y aprovechar las aplicaciones digitales para el aprendizaje.
- Disponibilidad para **el trabajo colaborativo**, puesto que, en el currículo actual, el desarrollo del pensamiento matemático tiene una perspectiva más individual que colaborativa, pues no se fomenta la socialización de conceptos, dudas, argumentos ni se comunican los procesos de pensamiento por los que se atraviesa.
- **La emoción** experimentada al resolver un problema.
- **La seguridad** que brinda contar con información suficiente y organizada.
- **Relacionar la matemática con la satisfacción y placer**, de forma análoga lo que ocurre tanto en el deporte como en el acto creativo y de percepción artística.
- **El empoderamiento** dado por una **toma de decisiones** bien fundamentada.
- **La posibilidad de hacer un proyecto de vida** basado en el desarrollo personal y colectivo, la ampliación de la base cultural y el poder intelectual para hacer del egresado de EMS, un ser humano con capacidad cognitiva y autonomía para aprender a lo largo de su vida.

II. Justificación

Que destine mi discípulo a la espada, a la Iglesia o a la abogacía, poco me importa. Antes de la vocación de sus padres, la naturaleza le llama a la vida humana. El oficio que quiero enseñarle es el vivir.

Emilio o la educación, Jean-Jacques Rousseau

En esta propuesta el pensamiento matemático se presenta como un recurso sociocognitivo, rodeado por aspectos socioemocionales y conectado en forma estrecha con las áreas de conocimiento. Enfocarse en el pensamiento matemático (desarrollándolo sobre un cierto conjunto de contenidos), en lugar de concentrarse únicamente en el desarrrollo de contenidos disciplinares específicos es un cambio relevante en la EMS, este cambio se encuentra en armonía con lo solicitado en el contexto internacional, donde se pide fortalecer el pensamiento crítico, el aprendizaje holístico, no fragmentado y que las y los egresados sean capaces de pensar y resolver problemas. Este recurso se asocia con la adquisición de habilidades, el aprendizaje de conceptos, procedimientos y lenguaje matemático, entre otros.



La propuesta se vuelve especialmente relevante al considerar el contexto de cambios acelerados en el que viven nuestras y nuestros estudiantes, en donde no solo un conocimiento disciplinar de la matemática se vuelve necesario para entender el funcionamiento del mundo tanto físico, como social, personal y virtual, sino que también se vuelve necesaria la adquisición de habilidades tanto intelectuales como socioemocionales que pueden desarrollarse a través del pensamiento matemático. En este sentido, para lograr una formación integral de las y los jóvenes, se vuelve indispensable entender al pensamiento matemático en su complejidad, como un recurso en el que se integran de manera dinámica diversos procesos cognitivos que interactúan y se retroalimentan entre sí.

Es evidente que el pensamiento matemático tiene valor dentro y para la propia matemática, aunado a esto, y sin restarle independencia y autonomía, se asume al pensamiento matemático como un recurso sociocognitivo, lo cual significa reconocer su valor para resolver problemas y modelar situaciones de las áreas de conocimiento y del ámbito socioemocional o de la aplicación de los procesos propios del pensamiento en los procesos de desarrollo de esas áreas de conocimiento.

Es una propuesta que encaja perfectamente en lo que Osuna (2020) recomienda para atacar la deserción escolar, debida en parte a la reprobación y al bajo logro académico en esta asignatura.

Ante la existencia de un rezago histórico en los conocimientos, las capacidades y las habilidades de las y los educandos en áreas fundamentales como las matemáticas, la NEM establece como propósito, la excelencia en la enseñanza, por lo que en esta propuesta se busca avanzar en ese sentido a través de: fomentar calidad y creatividad, considerar la enseñanza situada, contextualizar el pensamiento matemático para aplicarlo significativamente en otras áreas y ámbitos y profundizar en los conocimientos matemáticos.

En general, el pensamiento matemático involucra procesos de reflexión, abstracción y metacognición, cuya ejecución dan al sujeto la posibilidad del autoaprendizaje, incidiendo en **la formación integral de un ser humano.**

III. Fundamentos

La perspectiva centrada en las competencias se presentó como una alternativa en el terreno de la educación, se esperaba que tuviera mejores procesos de formación académica. En México, en el Acuerdo Secretarial 444, se establecen las competencias del Marco Curricular Común para el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), se asume a las competencias disciplinares básicas de las matemáticas como el medio para propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y critico (SEP, 2017b pp.67-68). Sin embargo, Ángel Díaz-Barriga (2013) había establecido que en matemáticas el *"desarrollo del pensamiento es más complejo que solamente la adquisición de diversos conocimientos, aunque requieren de esos conocimientos". Se ha visto también que "el empleo del término competencias ha dado origen a un lenguaje muy amplio en el terreno de la educación y esta diversificación lleva a promover clasificaciones distintas de las competencias y origina una enorme confusión"*, ante ese panorama, en esta propuesta, tanto las áreas de conocimiento como los recursos sociocognitivos**, no se basan en competencias matemáticas sino en Progresiones de Aprendizaje**, las cuales, según el acuerdo secretarial 17/08/22 son descripciones secuenciales de aprendizajes de conceptos, categorías, subcategorías y relaciones entre ellos, que llevarán a los estudiantes a desarrollar conocimientos y habilidades de forma gradual. El modelo de Progresiones de Aprendizaje es flexible, pues no limite al proceso de enseñanza-aprendizaje debido que ofrece autonomía didáctica.

Las progresiones de aprendizaje son una descripción cualitativa en el **cambio del nivel de sofisticación** del estudiante sobre un concepto clave, proceso, estrategia, práctica o hábito mental. Dicho cambio se puede deber a una variedad de factores como la maduración y la instrucción. Cada progresión se asume **funciona estadísticamente** y es **provisional**, **sujeta a verificación empírica** y cambios teóricos. (Deane, Sabatini & O Reilly, 2012). El aprendizaje de

la matemática muchas veces sucede en forma espiral: el o la estudiante retoman un concepto equipado con mayores conocimientos y experiencias, lo que hace que este retomar se vuelva más significativo y con un mayor nivel de alcance.
La presente propuesta se fundamenta en el constructivismo para generar un conocimiento matemático, no como una réplica objetiva de una única realidad externa al sujeto, sino como una construcción personal y social de significados, para ello se toma en cuenta el resultado de una evolución histórica, un proceso cultural en permanente desarrollo, situado en un contexto específico (D'Amore, Godino y Fandiño, 2008).

Por otra parte, se retoman los principios para la acción (NCTM, 2014) donde se establece que un programa educativo de matemáticas de excelencia incluye un currículo donde se desarrollan matemáticas relevantes a lo largo de procesos coherentes de aprendizaje y se establecen conexiones entre áreas de estudio de la matemática y entre la matemática y el mundo real. La propuesta está orientada alrededor de los procesos de razonamiento, en lugar de considerar una lista de contenidos matemáticos conceptuales y procedimentales.

Al poner como eje fundamental al pensamiento matemático, se espera que los recursos que lo conforman y que se encuentran representados en las categorías y las subcategorías (desarrolladas para esta propuesta acordes al nivel educativo), hagan una adecuada conexión entre las áreas de la matemática (aritmética, algebra, geometría, cálculo, estadística y probabilidad) y con diferentes áreas de conocimiento.

En esta propuesta se considera importante a la memoria para recuperar conocimientos que por su frecuencia de uso y aplicación se necesitan sin mayor análisis, pero también la memoria tendrá ahora un papel importante para construir nuevos conocimientos no solo para repetir los que ya se tienen. Se buscan aprendizajes profundos en lugar de conocimientos superficiales y se orienta hacia el trabajo creativo en la matemática a través y para la generación de un pensamiento crítico.

En esta propuesta el aprendizaje se inserta en las pedagogías activas, como un aprendizaje significativo que considera las necesidades de la persona que aprende, en un proceso de construcción social y dialógico de significados donde través de la reflexión, el diálogo con los otros y la revisión de situaciones de su contexto encuentra un sentido a los conocimientos conceptuales y procedimentales de la matemática.

IV. Propuesta de cambio

4.1. Definición de pensamiento matemático

El Pensamiento Matemático es un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas.

El Pensamiento Matemático se describe a través de las siguientes categorías, las cuales además orientan la práctica docente de este recurso: Procedural, Procesos de intuición y razonamiento, Solución de problemas y modelación, e Interacción y lenguaje matemático.

4.2. ¿Qué se propone y por qué?

A partir del diagnóstico y de la investigación teórica realizada, se hace la propuesta de cambio, en ella existe un área denominada Pensamiento Matemático que se integra al MCCEMS como un recurso sociocognitivo. Los recursos aportados a la formación del sujeto desde el pensamiento matemático son variados y abarcan técnicas, un lenguaje formal, procesos de pensamiento (entre los que destacan observar, intuir, conjeturar y argumentar), diversos métodos y heurísticas para la solución de problemas, la adquisición de habilidades para modelar una situación o fenómeno, formas de simbolizar, organizar y comunicar información, entre otros. También corresponde a esta área, el establecimiento de procesos para la negociación de significados y para comunicar la experiencia vivida.

El pensamiento matemático además busca que las y los estudiantes del bachillerato logren comprender mejor otras áreas de conocimiento y la aplicación del mismo en la toma de decisiones razonadas y en la valoración de la matemática por su belleza, utilidad y como un factor fundamental en la creación de su proyecto de vida.

Así se llevará al estudiantado del nivel medio superior a desarrollar procesos de razonamiento tanto lógicos como intuitivos, a desarrollar la creatividad y la imaginación, la curiosidad y la reflexión con la intención de conducirlo a un mayor nivel intelectual para fomentar el aprendizaje permanente y que éste sea gestionado por el propio sujeto.

Se busca desarrollar en el estudiantado un estilo de pensamiento que le permita movilizar conocimientos previos de la matemática, relacionar las áreas de conocimiento y los recursos del MCCEMS, tomar mejores decisiones y utilizarlo para comprender e interactuar con el mundo que le rodea ya que se aplica en temas realmente apasionantes para la juventud como la música, el deporte, el azar, el juego, el arte, el manejo de datos, las redes sociales, el desarrollo tecnológico, la moda, el transporte, la construcción, entre otros así como las marcadas por su relevancia en la Agenda 2030 como: la pobreza, el hambre, el saneamiento del agua, la producción y consumo responsable, el surgimiento de ciudades y comunidades sostenibles, la reducción de las desigualdades, la justicia, la innovación para la industria, la vida submarina, entre otras y muchas de ellas podrían ser tema de clase, investigaciones, proyectos, etc.

El pensamiento matemático es uno de los cuatro recursos sociocognitivos del MCCEMS, se le identifica como recurso porque las personas lo emplean de acuerdo con la situación que se le presente.

Propuesta:

1. Incluir en el plan de estudios al Pensamiento Matemático como un recurso sociocognitivo del MCCEMS en los tres primeros semestres. El abordaje de temas matemáticos o del pensamiento matemático en semestres posteriores dependerá de las necesidades cada subsistema.
2. Establecer al Pensamiento Matemático como un recurso sociocognitivo a través del cual se busca favorecer el desarrollo de habilidades y destrezas del estudiantado tales como: la observación, la intuición, la capacidad de conjeturar, la argumentación, su capacidad para emplear el lenguaje matemático en la comunicación de inquietudes y descubrimientos, así como también su uso en la descripción de situaciones y fenómenos.
3. Dotar al pensamiento matemático de una funcionalidad que le permita transversalizar saberes, respetando siempre su identidad y entendiendo que contará con momentos de desarrollo propio pero que también podrá apoyar en la articulación de conocimientos de otras áreas y recursos.
4. Fortalecer procesos mentales de razonamiento a través de la solución de problemáticas planteadas como reto intelectual, con un formato lúdico o de aplicación, que comprendan procesos de complejidad regulada.
5. Cambiar los propósitos actuales establecidos en forma de *competencias* por *progresiones de aprendizaje* y *aprendizajes de trayectoria*.
6. Abordar contenido atractivo para la comunidad estudiantil referente a su realidad actual, la historia, las humanidades, las ciencias naturales, experimentales y tecnología, las ciencias sociales o de la propia matemática, con la finalidad de favorecer a través de dicho abordaje el desarrollo de habilidades y destrezas cognitivas y socioemocionales.
7. Incluir actividades lúdicas y conexión con la vida e intereses de la comunidad estudiantil, ver aspectos atractivos del Pensamiento Matemático y de la matemática incluso en otras áreas de conocimiento. La visión anterior debe

formalizarse para que el estudiantado adquiera conocimiento matemático de calidad.

8. Proponer solución de retos y proyectos (transversales y de la matemática).
9. Contar con un tiempo asignado a sesiones de laboratorio experimental donde el estudiantado experimente en forma individual y colaborativa, realice ejercicios y actividades para promover la conjetura y el cuestionamiento, sugerido por las progresiones. Si se tiene posibilidad, incluir el uso de herramientas digitales para el aprendizaje que fomenten el papel activo y conduzca a investigar, cuestionar, dudar, criticar, crear, solucionar, validar y desarrollar tanto su forma individual como colaborativa de participar del quehacer matemático.
10. Mostrar al estudiantado el potencial de la matemática y el estado actual del trabajo de los matemáticos y de la investigación para despertar su interés en las actividades matemáticas asociadas al desarrollo científico y tecnológico.

Esta propuesta considera que en el nivel medio superior se debe mostrar el poder y la complejidad de la matemática, para romper con la creencia de que la matemática es un cuerpo acabado de saberes; dar una base sólida en contenido y una formación integral a través del Pensamiento Matemático, pedir cierto nivel de rigor y formalización en los procesos, pero sobre todo buscar la reflexión y el avance hacia la solución de problemas actuales de su esfera personal, local, regional, aspirando a desarrollar un pensamiento matemático con una visión universal y de futuro.

4.3. Propósitos del recurso

El pensamiento matemático, en el MCCEMS, posibilita:

- Favorecer en el estudiantado el desarrollo de habilidades relacionadas con la observación, la intuición, la capacidad de conjeturar, la argumentación, la comunicación y socialización de inquietudes intelectuales y soluciones a problemas, así como la descripción de fenómenos o situaciones mediante el empleo del lenguaje matemático.

- Recuperar una perspectiva histórico-filosófica para ver a la matemática a partir de los contextos que dieron origen a los conceptos y procedimientos, de la integración de procesos de abstracción, argumentación y otros, dando un enfoque amplio contrario al enfoque mecanicista que anula la relevancia de la matemática.
- Responder a motivaciones que pueden estar en el ambiente natural, social, cultural o en el sujeto pensante, para ampliar la visión de la matemática considerando su papel transformador, su dimensión cultural e intelectual que favorezca la formación integral del ser humano.
- Dar un sentido holístico a la formación matemática en la EMS para que el estudiantado alcance una educación de calidad, que incluya contenidos relevantes, actividades pertinentes y retadoras para lograr que le dé seguridad para tomar decisiones, favorezca una postura crítica y un estado emocional que lo impulse hacia el aprendizaje permanente y desarrolle una postura crítica en un marco de respeto a la condición y dignidad humana.
- Incorporar una visión centrada en el estudiante de tal forma que la articulación de saberes, conocimientos y habilidades tenga como eje director el progreso del estudiantado, respetando siempre la coherencia y consistencia de la disciplina.

Propósitos específicos del área

- Integrar a la matemática y al pensamiento matemático como un recurso sociocognitivo de tal forma que el desarrollo de habilidades cognitivas e incluso socioemocionales relacionadas con el pensamiento matemático se lleve a cabo a través del estudio y consideración de contenido que resulte significativo para el estudiantado.

- Apoyar al estudiantado en la explicación del mundo y de su entorno inmediato.
- Considerar el desarrollo del pensamiento matemático como un proceso no necesariamente lineal, posiblemente en espiral, complejo en donde ocurren avances, paradas, rodeos e incluso retrocesos.
- Relacionar al Pensamiento Matemático con otras áreas del conocimiento y con la vida, mediante el empleo de conceptos matemáticos para "**satisfacer las necesidades de la vida diaria que puede tener un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo**" (OCDE, 2010, p. 23).

V. Conceptos básicos del recurso

En este apartado haremos una revisión de los conceptos e instrumentos necesarios para entender la articulación de esta propuesta curricular: categorías y subcategorías del pensamiento matemático, aprendizajes de trayectoria, metas de aprendizaje y progresiones de aprendizaje del pensamiento matemático.

Buscamos el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes, para describirlo y orientar nuestra práctica docente hemos empleado las categorías y subcategorías de este recurso.

Los aprendizajes de trayectoria son esos grandes aprendizajes que esperamos que nuestros estudiantes adquieran al finalizar este trayecto formativo. Mientras que las metas de aprendizaje son esos indicadores que apuntalan el logro de los aprendizajes de trayectoria y que nosotros como docentes queremos evaluar.

El centro de la propuesta está en las progresiones de aprendizaje que describen el recorrido que las y los estudiantes pueden seguir para aprender de mejor manera conceptos y adquirir y desarrollar habilidades. Todo lo demás se desprende de ellas.

5.1. Categorías y subcategorías

Con la finalidad de describir al pensamiento matemático se establecen cuatro categorías. Las categorías son, en general, unidades integradoras de los procesos cognitivos y experiencias que se refieren, en este caso, al pensamiento matemático; estas categorías son conceptualizaciones que nos permiten analizar el logro de metas de aprendizajes, al tiempo que promueven en la y el estudiante la adquisición de una mayor conciencia acerca de lo que saben y de lo que queda aún por saber, los incentiva a buscar nuevas posibilidades de comprensión y a descubrir conexiones con las demás áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos y recursos socioemocionales.

Las categorías del pensamiento matemático pueden representarse como ciertas parcelas en las que se clasifican los procesos cognitivos asociados al quehacer matemático, sin embargo, hay que tener siempre presente que toda actividad matemática puede ocurrir de manera simultánea dentro de dos o más categorías, de hecho, una práctica significativa del pensamiento matemático implicaría que se lleven a cabo acciones dentro de categorías de forma simultánea.

Se han establecido cuatro categorías del pensamiento matemático: Procedural, Procesos de intuición y razonamiento, Solución de problemas y modelación e Interacción y lenguaje matemático. Cada una de estas categorías se articula a través de subcategorías que se describirán más adelante. Recalcamos que los procesos cognitivos asociados al pensamiento matemático ocurren muchas veces participando de dos o más categorías entre las que se da una retroalimentación de manera dinámica.

Desde el punto de vista pedagógico, las categorías orientan nuestra práctica docente al poner en consideración la atención del desarrollo de habilidades asociadas al pensamiento matemático a través del trabajo y favorecimiento de éstas.

En la enseñanza tradicional de la matemática se identifica predominantemente la presencia de la categoría procedural, por lo que una parte fundamental de la propuesta consiste en, sin dejar de atender esta categoría, buscar favorecer el desarrollo de las otras tres.

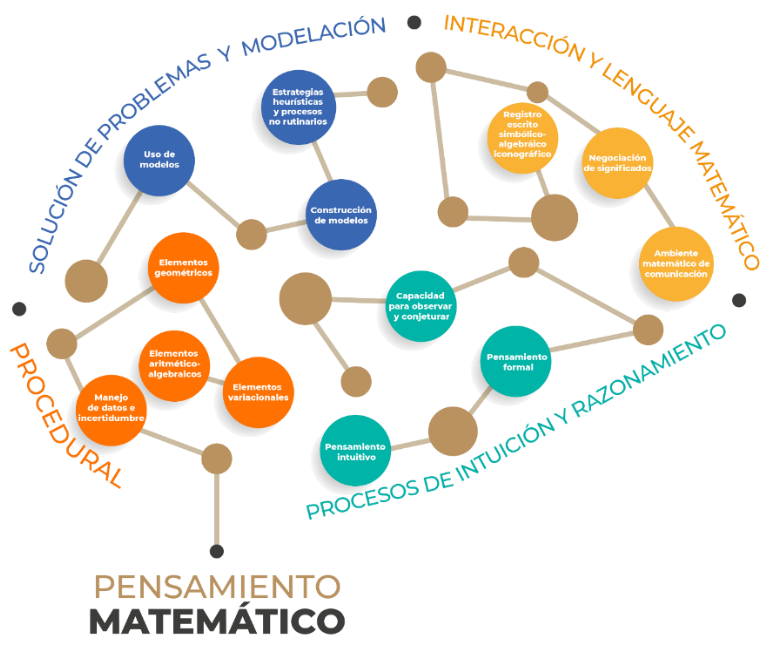


Figura 1. Pensamiento Matemático. **Categorías y Subcategorías.**

A través de esta estas categorías podemos describir el proceso de aprendizaje del estudiantado, el cual identifica, organiza, conjetura, comprende, interpreta, demuestra, resuelve, justifica, modela, entre otras diversas acciones, para dirigirse así hacia el logro de las metas de aprendizaje, éstas se alcanzan en forma gradual ejecutando complejos procesos de pensamiento que lo enriquecen (intuición, reflexión, experimentación, argumentación, validación y metacognición, entre otros) y le dan la potencialidad y versatilidad para ir de la concreción a la abstracción y generalización durante el aprendizaje, dando oportunidad de integrar a los conocimientos nuevos a los previos para ampliar su red de conocimientos matemáticos y poder aplicarlos en otros contextos.

Es importante resaltar que, las observaciones, los argumentos, los modelos que se construyan y demás actividades relacionadas con el pensamiento matemático que esperamos que ejecuten las y los estudiantes las consideramos enmarcadas en su correcta dimensión, por poner un ejemplo, no esperamos que un estudiante del bachillerato proponga la construcción de un modelo como lo haría un estudiante de ingeniería, pero sí que proponga la construcción de un modelo adecuado a la complejidad y nivel de sofisticación propio del bachillerato. También es importante recordar que en estos tres primeros semestres no estamos buscando formar futuros matemáticos o ingenieros, más bien queremos poner a disposición de todas y todos algunos elementos del pensamiento matemático que serán valiosos y de utilidad para quienes los desarrollen, sin importar el derrotero que se siga al finalizar este trayecto formativo. Esto implica, entre otras cosas, que nos cuidemos mucho de tratar de analizar taxonómicamente las acciones del estudiante, pues estas deberán observarse y ser analizadas desde una perspectiva que considere un proceso de refinamiento a lo largo del semestre (esto se verá reflejado, por ejemplo, cuando se presenten las progresiones del pensamiento matemático articuladas con metas de aprendizaje las cuales se repetirán a lo largo de los tres semestres. En cada instancia de cada una de estas metas, lo que como docentes debemos hacer es observar, desde un enfoque de evaluación formativa, el progreso de su ejecución por parte de nuestro estudiante).

A continuación, describiremos brevemente cada una de las categorías del pensamiento matemático junto con las subcategorías que las integran.

Categoría I. Procedural

Esta categoría engloba los procesos propios de la ejecución mecanizada e incluso automatizada de algoritmos y procedimientos, así como también el acto de interpretar los resultados que arrojan dichos procedimientos algorítmicos.

Subcategorías:

Elementos aritméticos-algebraicos

Comprende los recursos procedurales involucrados en la manipulación tanto aritmética como algebraica de objetos matemáticos.

Elementos geométricos

Se refiere a la manipulación de objetos geométricos tales como puntos, líneas, figuras, planos, etc. Algunas veces relacionados con propiedades o con sistemas de referencia mediante el uso de coordenadas y/o magnitudes.

Elementos variacionales

Comprende los recursos procedurales involucrados en la manipulación de objetos matemáticos relacionados con la variación tales como funciones y límites.

Manejo de datos e incertidumbre

Considera el uso e interpretación de datos y el cálculo de posibilidades. Incluye desde la recolección de datos, la revisión de los términos básicos utilizados en probabilidad y estadística y las formas en que se recolectan datos a partir de una necesidad específica, así como las ventajas de elegir una forma para organizarlos, interpretarlos y utilizarlos en la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre.

La primera categoría constituye un grupo inicial de recursos y corresponden al dominio de los **recursos procedurales,** lleva a describir y ejecutar procedimientos matemáticos, en forma sintética o extendida, automatizada o como una secuencia razonada de pasos. En las diferentes áreas de la matemática hay formas de hacer, de resolver, de simplificar, etc., por eso su contenido se vuelve un valioso recurso al emplearlos en la solución de problemas y en la toma de decisiones.

Categoría 2. Procesos de Intuición y razonamiento

Esta categoría incluye procesos fundamentales en el quehacer matemático como lo son la observación, la intuición, el acto de formular conjeturas y la argumentación.

La matemática tiene una cualidad dual: la intuición y la formalidad. Todo descubrimiento o creación matemático parte de la intuición, de un chispazo que resulta complicado de describir, el cual no se articula a través de una serie de pasos lógicos secuenciados. La forma en que una idea nace casi nunca es lógica. Por otro lado, la matemática exige, para poder continuar desarrollándose, la formalización y presentación lógica y formal de aquellas ideas que el individuo aprehendió intuitivamente; de suerte tal que existe una especie de proceso dialéctico en el desarrollo de la matemática que va de la intuición a la formalidad y que se repite constantemente.

Es importante mencionar que los procesos cognitivos que se buscan desarrollar en el estudiantado en esta etapa no pretenden tener el mismo acabado que aquellos que desarrollan los profesionales de la matemática, pero sí ser fundamentalmente dichos procesos, pero a un nivel de complejidad adecuado al desarrollo del estudiante.

Subcategorías:

Capacidad para observar y conjeturar

Los descubrimientos a los que ha llegado el ser humano se han realizado después de que ha sido capaz de observar algún elemento crucial de su objeto de estudio. A partir de sus observaciones y de su experiencia previa, el ser humano lanza conjeturas: afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas y que demandan una mayor investigación y reflexión.

Pensamiento intuitivo

Muy relacionada con la subcategoría anterior, la subcategoría de Pensamiento intuitivo engloba aquellos procesos cognitivos por los cuales el ser humano comprende en una primera aproximación los objetos matemáticos y fenómenos de diversa índole, no necesariamente teórica.

Pensamiento formal

La matemática para poder continuar desarrollándose necesita una presentación formal. Con esta subcategoría estamos englobando aquellas habilidades involucradas al producir argumentaciones rigurosas en favor o en contra de afirmaciones tanto matemáticas como de diversa naturaleza.

La propuesta es llevar al estudiantado a participar de estos procesos cognitivos. Un estudiante puede observar, intuir, conjeturar y argumentar, evidentemente no al nivel de complejidad con que realiza estas acciones la o el investigador de matemáticas, pero la diferencia es más de orden cuantitativo que cualitativo.

Categoría 3. Solución de problemas y modelación

Esta categoría engloba aquellos procesos que suceden cuando describimos un fenómeno utilizando técnicas y lenguaje matemático o resolvemos un problema, entendiendo a este último como un planteamiento al que no se le puede dar respuesta empleando procedimientos mecánicos (obsérvese cómo esta definición de problema depende y varía de individuo a individuo). La modelación se entiende como el uso de la matemática y su lenguaje en la descripción de fenómenos de diversa naturaleza.

Subcategorías.

Uso de Modelos

Emplear una representación abstracta, conceptual, gráfica o simbólica para describir un fenómeno o de un proceso, verificando el cumplimiento de las hipótesis necesarias, para analizar la relación entre sus variables lo que permite comprender fenómenos naturales, sociales, físicos y otros y además, resolver problemas.

Construcción de Modelos

Implica, entre otras cosas, la búsqueda, delimitación y determinación de las variables adecuadas para describir la situación, problema o fenómeno estudiado.

Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

La heurística se refiere a estrategias, métodos, criterios o astucias utilizados para hacer posible la solución de problemas complejos. Un procedimiento es *no rutinario* cuando no basta con aplicar una regla o un método mecanizado o de carácter algorítmico o establecido, sino que requiere cierta intuición y búsqueda poniendo en práctica un conjunto de conocimientos y de experiencias anteriores.

La tercera categoría dota de recursos para solucionar problemas y plantear modelos, desde una perspectiva global, estos recursos son útiles para comprender el problema, diseñar y ejecutar un plan y probar el resultado. Con estos recursos se resuelven situaciones problemáticas y describen fenómenos empleando el pensamiento matemático.

Categoría 4. Interacción y lenguaje matemático

La matemática posee un lenguaje, el cual resulta ser riguroso, y que, a su vez, convive y se comunica a través de diversos lenguajes naturales (español, lenguas indígenas, inglés, lengua de señas, etc.) Esta categoría engloba las consideraciones propias que el o la practicante del pensamiento matemático debe tener en mente cuando comunica sus ideas, entendiendo que un lenguaje natural y un lenguaje formal tienen puntos de convergencia y puntos de divergencia; en ambos casos buscamos que el estudiantado sea riguroso con el uso de estos lenguajes.

Subcategorías

Registro escrito, simbólico, algébrico e iconográfico

Esta subcategoría se articula al establecer jerarquías, agrupaciones, composiciones, el uso formal de símbolos e imágenes respetando las propiedades y reglas.

Negociación de significados

Esta subcategoría se aplica al revisar tanto individual como colectivamente los significados de las expresiones, sus posible sentidos e interpretaciones, así como la generación de expresiones y representaciones formales asociadas.

Ambiente matemático de comunicación.

Se describe así al ambiente generado para trasmitir ideas, inquietudes, conjeturas y conceptos matemáticos empleando lenguajes naturales y formales.

La cuarta categoría aporta al individuo recursos para emplear el lenguaje matemático y para interactuar con personas de su entorno dando una dimensión social al aprendizaje.

5.2. Transversalidad

Entendemos por transversalidad al enfoque de alta interacción entre áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos y recursos socioemocionales del MCCEMS. Estudios que poseen cierta relación con dicha concepción (Eronen, L., et al., 2019, Drake, S. M., & Burns, R. C., 2004) nos hablan de un espectro que comprende lo multidisciplinario (diferentes disciplinas se integran alrededor de un tema común), lo interdisciplinario (la organización curricular alrededor de aprendizajes comunes a través de disciplinas) y la transdisciplinariedad (basada en interrogantes que las y los estudiantes pueden hacerse y en sus inquietudes por desarrollar habilidades para la vida real dentro de contextos reales).

Al ser integrado como un recurso sociocognitivo al MCCEMS, el pensamiento matemático adquiere una función transversal dentro de dicha estructura. Esto no implica que todo cuanto se trabaje con las y los estudiantes acerca del pensamiento matemático deba de transversalizarse, pues existirán momentos en que la disciplina demande trabajo sobre sí misma para poder continuar con un desarrollo integral.

El pensamiento matemático al posicionarse junto con los demás recursos sociocognitivos cumple una función de apoyo para que el estudiantado pueda consolidar sus conocimientos de las demás áreas. Son evidentes los puntos de encuentro entre el pensamiento matemático y las ciencias sociales (al estudiar fenómenos económicos o poblaciones, por poner un par de ejemplos), con las ciencias naturales, experimentales y tecnología (al hacer uso del lenguaje matemático para describir diversas leyes de la física o la química, al utilizar modelos matemáticos para ayudar en la explicación de algunos sistemas biológicos, etc.), con las humanidades (partiendo del hecho de que la propia matemática es obra creativa del ser humano y que muchas veces ha estado inmersa en diversos desarrollos artísticos).

Es importante decir que la transversalidad tanto con áreas de conocimientos como con recursos socioemocionales y sociocognitivos puede operar en dos niveles fundamentales: en un primer nivel a través de esos puntos de contacto existentes con las demás disciplinas a las que nos referíamos en el párrafo anterior; pero también en un segundo nivel, si se quiere más profundo, en donde la interiorización de las habilidades relacionadas con el pensamiento matemático permiten una mejor comprensión, una ordenación mental más clara y permiten también una mayor profundidad dentro de las demás experiencias cognitivas.

A pesar de la importante función que se le otorga al pensamiento matemático, no debemos olvidar que nosotras y nosotros, como docentes de pensamiento matemático, no tendremos necesariamente un lugar protagónico en la escuela. El trabajo colaborativo, tan esencial para el desarrollo del plan aula, escuela y comunidad, asume interacciones profesionales y respetuosas en la que todas y todos los agentes involucrados en la educación, entre los que nos encontramos nosotros y las y los colegas de otras áreas y recursos, valoren la función y las aportaciones de todos los demás.

Por último, es necesario que logremos enseñar con perspectiva socioemocional, pues enseñamos a seres humanos que merecen todo nuestro respeto y también debido a que logrando consolidar un ambiente de confianza mutua podremos desempeñar mejor nuestra importante labor.

5.3. Perfil de egreso: Aprendizajes de trayectoria. Metas de aprendizaje.

Con fundamento en el acuerdo secretarial 17/08/22 se establece que los aprendizajes de trayectoria constituyen el perfil de egreso del MCCEMS[1]. Los aprendizajes de trayectoria del MCCEMS dotan de identidad a la educación media superior, favorecen al desarrollo integral de las y los adolescentes y jóvenes, son aspiraciones en la práctica educativa, constituyen el perfil de egreso de la EMS, responden a las características biopsicosocioculturales de las y los estudiantes, así como a constantes cambios de los diversos contextos plurales y multiculturales.

Si partimos de considerar a las y los estudiantes al centro del proceso de enseñanza y dentro de un ambiente constructivista de aprendizaje, las progresiones de aprendizaje resultan ser un instrumento adecuado para la articulación curricular del pensamiento matemático (Taguma, Gabriel, & Meow, 2019).

Se ha buscado una visión de trayectoria, lo cual implica tener siempre presente dónde se encuentra el o la estudiante, de dónde viene y hacia dónde va, sin olvidar que las progresiones de aprendizaje cuentan con el suficiente espacio y

[1] Acuerdo número 17/08/22 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior; (DOF, 17/08/22), 2 de septiembre 2022, México.

flexibilidad para adecuarse a las distintas formas y tiempos en que el estudiantado aprende.

A continuación, hacemos explícitos los aprendizajes de trayectoria que se pretende que el estudiantado adquiera al finalizar estos primeros tres semestres, así como también las metas de aprendizaje con los que se estarán alcanzando, se han clasificado utilizando las categorías del pensamiento matemático.

La función estructural que juegan las metas de aprendizaje en esta configuración curricular es la de indicadores que nos permiten observar el progreso de nuestros estudiantes. En ese sentido, se encontrará una misma meta de aprendizaje vinculada a más de una progresión de incluso diferentes semestres. Lo que se busca es que, desde la perspectiva de la evaluación formativa, el o la docente observe y analice el desarrollo (evolución o involución) en cómo el estudiante ejecuta cada una de estas metas de aprendizaje a lo largo del tiempo.

Las metas de aprendizaje no se alcanzan con tan solo pretender abordarla con nuestros estudiantes en una progresión, sino que es un proceso de refinamiento constante. Cada una de estas aproximaciones al logro de dichas metas pretenden sumar al logro de los aprendizajes de trayectoria.

Se han utilizado las categorías del pensamiento matemático para clasificar las metas de aprendizaje y los correspondientes aprendizajes de trayectoria.

La trayectoria que seguirán las y los estudiantes en este proceso formativo para alcanzar dichos aprendizajes dista de ser única y no es lineal sino que sucede en espiral (la forma en que nuestro estudiante aborda una meta de aprendizaje se va refinando con el tiempo gracias a una correcta guía y mediación docente).

Toda progresión busca favorecer el logro de algunas de estas metas y por lo tanto el logro de los aprendizajes de trayectoria. Al final de cada progresión se ha colocado la meta de aprendizaje que busca favorecerse, sin que esto implique que sólo se estaría trabajando en la consecución de dicha meta.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO			
Categoría			
Procedural	**Procesos de Intuición y Razonamiento**	**Solución de problemas y modelación**	**Interacción y lenguaje matemático**
Subcategorías			
Elementos aritmético-algebraicos.	Capacidad para observar y conjeturar	Uso de modelos	Registro escrito, simbólico, algebraíco e iconográfico
Elementos geométricos	Pensamiento intuitivo	Construcción de Modelos	Negociación de significados
Elementos variacionales Manejo de datos e incertidumbre	Pensamiento formal	Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	Ambiente matemático de Comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo

conocimiento y de su vida personal.	problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.)		comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			
C1M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	C2M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	C3M1 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	C4M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
C1M2 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	C2M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	C3M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto	C4M2 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.

		teórico como de su entorno.	
C1M3 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	C2M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	C3M3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	C4M3 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.
	C2M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	C3M4 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

VI. Progresiones de aprendizaje

"El investigador en matemáticas como en cualquier otra ciencia, no trabaja con un modelo deductivo riguroso. Por el contrario, esencialmente hace uso de su imaginación, y procede intuitivamente ayudado por métodos heurísticos [...] sin el descubrimiento no sería posible la conclusión."

Felix Klein

A continuación, presentaremos la propuesta de articulación a través de progresiones de aprendizaje para los primeros tres semestres de pensamiento matemático. Siguiendo la filosofía y presupuestos constructivistas de esta forma de organización (Simons, 1995), el desarrollo del pensamiento matemático descrito en estas páginas no es la presentación o deconstrucción lógica que se hace desde la disciplina, sino el que corresponde al desarrollo que pueden seguir las y los estudiantes durante su aprendizaje. No se descuida la fundamentación lógica, pero en materia educativa no podemos utilizar exclusivamente dicho criterio como eje articulador, en ese sentido hemos trazado un mapa del desarrollo constructivo que realizan las y los estudiantes atendiendo siempre la consistencia de la presentación matemática.

La presentación lógica de la matemática es la presentación por excelencia con la cual investigadores e investigadoras comunican sus resultados (aunque, como postula Felix Klein, no es a través de ella mediante la cual llegan a intuir estos), sin embargo, no debemos confundir la presentación lógico-deductiva a la Euclides con la presentación pedagógica de la matemática y la descripción del desarrollo del pensamiento matemático en el estudiantado. Para describir dicho desarrollo se emplean las progresiones de aprendizaje, las cuales, por ello mismo, están secuenciadas y su orden no puede alterarse. En nuestra práctica docente debemos abordarlas una a una en su totalidad, en el orden planteado.

El modelo de progresiones, a pesar de que no nos permite alterar su estructura, sí nos brinda autonomía didáctica. Esta autonomía, entre otras cosas, nos permite dosificar el tiempo en el que abordaremos cada progresión (hay progresiones que requieren menos tiempo que otras que tienden a ser más complejas). Para lograr una correcta dosificación es necesario tener una visión global de todas y cada una de las progresiones.

La autonomía didáctica también nos permite determinar el nivel de profundidad con el que abordaremos cada progresión, esto dependerá, naturalmente, de nuestra experiencia docente, de nuestras estrategias y recursos didácticos, pero sobre todo del grupo a quien le estemos impartiendo el curso correspondiente. La posibilidad de decidir la profundidad con la que se trabajará una progresión no crea escenarios de desigualdad: como se ha enfatizado más arriba, las metas de aprendizaje son ese elemento estructural de esta propuesta que nos sirve de indicador para evaluar el progreso de nuestros estudiantes, si la progresión la abordamos considerando contenido con este o aquel nivel de profundidad dependerá de nuestro grupo y estará permitido siempre y cuando se atiendan las metas de aprendizaje previstas. Por lo demás, como es bien sabido, dentro de un mismo grupo, existen estudiantes que logran alcanzar variados niveles de sofisticación, no se busca uniformizar, sino potencializar y apoyar a cada estudiante a encontrar su talento, sea dentro del pensamiento matemático o bien dentro de otra área o recurso del MCCEMS. Al garantizar el alcance de las metas de aprendizaje, garantizamos el logro de los aprendizajes de trayectoria propuestos para todas y todos los estudiantes de Media Superior.

Por último, la autonomía didáctica contemplada en el modelo de progresiones de aprendizaje permite abordar cada una de ellas contextualizando a la realidad circundante de nuestras y nuestros estudiantes. Esto no solo se refiere solamente a contextualizar los temas y problemáticas con los que se trabajará una progresión, también hace referencia a la contextualización del uso de los recursos didácticos (no se hace obligatorio, por ejemplo, el uso de tecnología, así como tampoco se prohíbe el uso de ésta).

En cada progresión se han establecido metas de aprendizaje clasificadas por categoría del pensamiento matemático, las cuales son un mapeo sugerido para guiar nuestra práctica docente. No deben leerse esto como si se tratara de una camisa de fuerza, el o la docente pueden establecer, a través de diversas propuestas didácticas, otras maneras de estructurar estos componentes para lograr el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiantado. Sin embargo, hay que aclarar que esto es posible solo si se garantiza el desarrollo equitativo en cada una de las categorías del pensamiento matemático a lo largo de cada semestre. Una práctica no exitosa sería aquella en la que se establecieran metas referentes a solo una categoría, por ejemplo, que solo se tratará a lo largo de las progresiones de un semestre el desarrollo de la categoría procedural, o por el contrario, que a lo largo del semestre no se atendiera dicha categoría. Realizar este mapeo en el cual se vinculan progresiones, categorías y metas de aprendizaje no es una tarea trivial (y mucho menos arbitraria), pero el o la docente puede realizarla si y solo si la articulación resultante considera el desarrollo de todas estas categorías. Esta licencia se ha establecido debido a que se parte del reconocimiento de las y los docentes como profesionales de la educación.

Es importante recordar que toda buena actividad que busque favorecer el desarrollo del pensamiento matemático implicará el trabajo simultaneo sobre dos o más categorías. En ese sentido, el mapeo referido en el párrafo anterior no indica que se estarían trabajando exclusivamente las categorías enunciadas en cada progresión, más bien que éstas son las categorías y metas de aprendizaje en las cuales se ha puesto el acento dentro de dicha progresión. Además, es importante resaltar que las metas de aprendizaje no son necesariamente alcanzadas con su tratamiento dentro de específicamente una de las progresiones, sino que éstas serán frecuentadas a lo largo de estos semestres para con ello lograr alcanzar los aprendizajes de trayectoria planteados.

Se han colocado "*anotaciones didácticas*" en algunas progresiones como sugerencias que el y la docente pueden elegir seguir en su práctica, modificándolas si es necesario. En ocasiones se menciona como sugerencia mostrar algunos de los avances más recientes de la matemática en un nivel divulgativo, esto tiene una razón fundamental de ser: una de las creencias acerca de la matemática más arraigadas en la población en general es que ésta es un cuerpo de conocimiento acabado. Es probable que uno de los factores de desinterés de nuestras y nuestros estudiantes por esta ciencia se deba en parte a esta creencia, si mostramos a nuestros estudiantes el poder de la matemática de manera análoga a como se hace en materia de música cuando se les lleva a escuchar la grandeza de una obra musical, sin que se pida luego a las y los estudiantes tocar como el primer violín, es posible que rompamos con la creencia de que la matemática es un cuerpo de conocimientos que debe ser tratado de manera similar a como se hace la disección de un cadáver, y con ello es posible que incidamos en despertar el interés de nuestras y nuestros estudiantes por el pensamiento matemático, además de que a la par les estaríamos mostrando opciones de vida que aunque no necesariamente acojan para sí, son ventanas que se abren hacia otros caminos para su desarrollo humano y profesional.

En cada una de las progresiones se debe tener una visión global de los aprendizajes de trayectoria esperados del estudiando, para que desde etapas tempranas se prepare el terreno para el posterior trabajo de esos nuevos y más sofisticados objetos matemáticos. Por poner un ejemplo, en la primera unidad curricular de aprendizaje al estudiar correlación entre dos variables se espera que en el aula se introduzcan ideas y nociones que se retomarán en la segunda unidad curricular donde se revisaran funciones lineales para que además en el tercer semestre el estudiando llegue a entender un nivel de complejidad mayor de funciones reales de variable real. Ejemplos como este, en el que una sola idea se desarrolla a lo largo de los tres semestres hay muchos y es importante que el profesorado adquiera una visión global de las progresiones para poder dar un mejor acompañamiento a las y los estudiantes en este trayecto formativo.

Iniciamos el primer semestre trabajando con el pensamiento probabilístico y estadístico, arrancar con dicha elección tiene dos razones fundamentales: la primera es que nos sirve para, apelando a la experiencia de las y los alumnos, revisar, y en su caso reforzar, algunos aprendizajes de trayectoria como la estructura de los números reales, la ubicación de los números en la recta real, proporciones y porcentajes, entre muchos otros, de una manera contextualizada, de tal forma que la revisión de dichos conceptos puede resultar de mayor significación para el estudiantado a que si solo se hace de manera mecanicista. La segunda razón tiene que ver con los tiempos en los que estamos inmersos nosotros y nuestros estudiantes: la incertidumbre es una condición inseparable de nuestras vidas que en épocas volátiles como la nuestra se acentúa: poseer habilidades que tengan que ver con el manejo de datos, su organización, conciencia sobre la variabilidad y un cierto entendimiento del azar es indispensable para que las y los jóvenes puedan acceder a una mejor calidad de vida.

El segundo semestre corresponde al pensamiento aritmético, algebraico y geométrico. Se han colocado estos tres tipos de pensamiento en un mismo semestre pues resultan estar íntimamente ligados: el estudiantado históricamente ha sufrido dificultades para transitar de la aritmética al álgebra, esperamos que la articulación por progresiones haga que este tránsito sea más amable y llevadero. El álgebra está íntimamente relacionada con la aritmética y la geometría pues, como decía Sophie Germian: el álgebra no es más geometría escrita y la geometría no es sino álgebra dibujada.

Una particularidad importante del segundo semestre es la revisión de un tema fundamental para el estudiantado: las matemáticas financieras. En esta primera aproximación se espera que las y los jóvenes adquieran conciencia financiera sobre sus ahorros, las deudas, las instituciones bancarias, los préstamos e hipotecas e incluso acerca de las afores, sin que ello quiera decir que comprendan completamente el funcionamiento de éstos. Consideramos que esta temática es una con la que toda y todo estudiante del bachillerato debiera estar familiarizado debido al enorme peso que tiene en el desarrollo de nuestras vidas.

La geometría se desarrolla en el segundo semestre desde la vertiente analítica y la vertiente sintética. Se construyen elementos mínimos de la geometría analítica como el uso del sistema coordenado cartesiano y algunas propiedades de rectas en el plano, posponiendo otros estudios interesantes para semestres subsecuentes. En el caso de la geometría sintética, se comienza con la conceptualización del cálculo de áreas y volúmenes, misma que será de utilidad para las y los estudiantes que en el futuro tengan algún acercamiento con temas de cálculo integral. Posteriormente se toma al teorema del triángulo de Napoleón como un problema-meta cuya cabal comprensión llevaría al estudiante a manejar los principales teoremas y resultados de la geometría euclidiana (Díaz Barriga, Alejandro, s. f.).

Por último, en el tercer semestre revisamos algunos elementos del pensamiento variacional, la presentación vuelve a ser fundamentalmente heurística, siguiendo de cerca a Henri Poincaré:

“Cuando un estudiante comienza a estudiar seriamente matemáticas, cree saber qué es una fracción, qué es la continuidad y cuál es el área de una superficie curva; considera como evidente, por ejemplo, que una función continua no puede cambiar de signo sin anularse. Si se le dice, sin ninguna preparación: No, eso no es evidente, debes demostrarlo; y si la demostración se apoya en premisas que le parecen menos evidentes que las conclusiones, ¿qué pensará el infortunado estudiante? Pensará que la ciencia de las matemáticas es sólo una acumulación arbitraria de sutilezas inútiles; se aburrirá de las

matemáticas o se divertirá con ellas como con un juego y llegará a un estado mental análogo al de los sofistas griegos."

En ese sentido, no llegamos a desarrollar con total formalidad el estudio del cálculo diferencial, en particular no se plantea atender la definición épsilon-delta de límites. Tampoco se trabaja tal cual lo hicieron Leibniz y Newton en su época, a saber, a través de infinitesimales, sino que nos colocamos en un terreno intermedio en donde asumimos algunas propiedades de los límites de funciones reales de variable real para poder construir sobre dichas suposiciones nuevos conocimientos.

Introducir a nuestras y nuestros estudiantes al pensamiento variacional es fundamental pues a través de éste es que logramos comprender muchos fenómenos naturales, sociales e incluso médicos. La ciencia está mayoritariamente escrita en el lenguaje del cálculo y en este semestre las y los estudiantes tendrán un primer acercamiento a dicho lenguaje.

En la siguiente tabla se recapitulan los tipos de pensamiento que se estarán trabajando en cada una de las unidades de aprendizaje curricular.

Unidad de Aprendizaje Curricular	Tipo del pensamiento matemático
Pensamiento Matemático 1	Pensamiento estadístico y probabilístico
Pensamiento Matemático 2	Pensamiento aritmético, algebraico y geométrico.
Pensamiento Matemático 3	Pensamiento variacional.

6.1. Primer semestre – Pensamiento estadístico y probabilístico

6.1.1. Planteamiento general

La incertidumbre es una condición inseparable del ser humano y la variabilidad inherente a diversos fenómenos de nuestra cotidianidad ha impulsado a la humanidad a idear formas de comprender de mejor manera el azar. Por otro lado, la época en la que vivimos se caracteriza por la abrumadora cantidad de información con la que tenemos contacto diariamente a través de diversos medios de comunicación. Ambas condiciones hacen indispensable que en el bachillerato busquemos formar seres humanos con habilidades de discernimiento y con una conciencia sobre los múltiples factores que nos arrojan a la incertidumbre para que puedan cuantificarla lo mejor posible, y así, les sea posible tomar decisiones más razonadas.

6.1.2. Aplicación disciplinar

El desarrollo disciplinar del pensamiento estadístico y probabilístico se da a través de la revisión de conceptos básicos de la probabilidad y la estadística: se comienza con la revisión de la variabilidad y cómo ésta hace necesario que busquemos cuantificar la incertidumbre.

Se llega a la definición de probabilidad teórica partiendo desde una perspectiva frecuencial. Para poder calcular la probabilidad de eventos aleatorios simples se vuelve necesario hacer una discusión sobre técnicas de conteo.

El concepto de probabilidad condicional es estudiado, con la posibilidad de llegar incluso a revisar el teorema de Bayes y sus aplicaciones en la actualidad.

Se estudia la recolección de datos y su organización, teniendo en cuenta la naturaleza de la o las variables estudiadas. Se analiza la correlación entre variables cuantitativas aprovechando el momento para revisar algunas ideas sobre rectas en el plano.

Ideas básicas de la estadística descriptiva tales como medidas de tendencia central y medidas de dispersión son revisadas buscando que el estudiantado sepa leer e interpretar correctamente lo que éstas dicen acerca de un fenómeno estudiado.

Por último, se termina revisando algunas ideas acerca de distribuciones y de estadística inferencial como prueba de hipótesis.

6.1.3. Metas, categorías y progresiones

1. Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de

problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.
Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas. (C2M1).

Anotaciones didácticas: Es importante que en este punto vayamos introduciendo algunas ideas referentes a la variabilidad, pues

"[...] El principio más fundamental en estadística es aquel de variabilidad. Si el mundo fuera perfectamente predecible y no mostrara variabilidad, no tendríamos necesidad de estudiar estadística." (Rossman, A. Chance, L. 2011)

Se recomienda ir introduciendo a las y los alumnos a la idea de que una gran cantidad de fenómenos y situaciones de interés (el clima, el comportamiento de la bolsa de valores, etc.), por la gran cantidad de variables que intervienen en ellos, tienen un comportamiento caótico o impredecible y que es por ello que buscamos herramientas que nos ayuden cuantificar la incertidumbre.

Buscar que los ejemplos sean significativos para el estudiantado nos sugiere considerar situaciones que le sean cercanas. Mencionamos, sin pretender establecer que estos deban de ser los ejemplos a tratar, los siguientes: la reciente pandemia de COVID-19, indicadores de violencia en su comunidad, problemas relacionados con el agua (sequías o inundaciones, dependiendo de la región). Estos ejemplos nos permiten tener transversalidad con recursos socioemocionales y áreas del conocimiento como las ciencias sociales.

2. Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de la consulta de datos o simulaciones, considera la frecuencia con la que un evento puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda (C2M1, C2M2).

   Anotaciones didácticas: Se busca que el estudiantado tenga una primera aproximación al pensamiento probabilístico desde una perspectiva frecuencial. Cuando se menciona el uso de simulaciones se deja abierta la posibilidad del uso de hojas de cálculo o software más sofisticado como R, aclarando que si no se cuenta con la infraestructura para llevarlo a cabo así, se pueden emplear materiales más asequibles como hojas comunes, fichas y el trabajo colaborativo en el grupo.

3. Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica (C1M1, C3M1, C4M1).

   Anotaciones didácticas: Se sugiere continuar con el uso de tecnología cuando esto sea factible, además de acompañar la discusión de este tema desde una perspectiva histórica y humanista sobre los orígenes de la probabilidad.

   Si el grupo lo requiere, es posible aprovechar este elemento de la progresión para revisar con las y los estudiantes aprendizajes de trayectoria relativos a la ubicación de los números reales en la recta, proporciones, porcentajes y fracciones, de tal forma que se revisan dichos conceptos dentro de un contexto que los vuelve significativos para el estudiantado.

   Es importante hacer énfasis en la hipótesis de equiprobabilidad para el cálculo de probabilidades simples.

4. Elige una técnica de conteo (ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones.
   Las técnicas de conteo se introducen para entender la probabilidad de eventos aleatorios en los que la expresión explícita de su espacio muestral es poco factible. (C1M2, C1M3, C3M3)

   Anotaciones didácticas: Es posible en este punto considerar ejemplos de la industria si es que esto es adecuado al contexto del estudiantado:

   "En una industria automotriz se tiene el siguiente procedimiento de control de calidad: de un lote de 100 piezas manufacturadas, un inspector elige 10 de manera aleatoria y las analiza; si ninguna de dichas piezas es defectuosa, el inspector acepta el lote de 100 piezas. ¿Cuál es la probabilidad de que dentro del lote existan 10 piezas defectuosas y que éstas no sean detectadas por el inspector? ¿Cambiarías el control de calidad de la empresa?"

5. Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e

independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales.
La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes. (C2M4)

Anotaciones didácticas: Es posible, si el grupo así lo permite, llegar incluso a tratar el teorema de Bayes. Se sugiere considerar las múltiples aplicaciones que dicho resultado tiene en la actualidad en campos como la inteligencia artificial, no con la finalidad de que la o el estudiante realicen los procedimientos y entiendan a profundidad dichas aplicaciones, sino como una forma de mostrar el poder de la matemática en diversos ámbitos del desarrollo humano.

Para introducir el estudio de probabilidad condicional se sugiere considerar la paradoja de Monty Hall y casos médicos de pruebas (de embarazo, para detectar cáncer, etc.) en los que se analice la posibilidad de tener falsos positivos y falsos negativos de tal forma que el tema pueda vincularse este estudio con recursos socioemocionales.

6. Selecciona una problemática o situación de interés, con la finalidad de recolectar información y datos de fuentes confiables e identifica las variables relevantes para su estudio. (C1M1, C2M1, C4M2)

   Anotaciones didácticas: Con este elemento de la progresión se busca que el estudiantado continue con su entendimiento del concepto de variabilidad, en este momento se puede introducir la clasificación de variables según su naturaleza (cuantitativa, categórica, etc.) y hacer hincapié en que los instrumentos que se utilizan para analizar variables dependen de la naturaleza misma de éstas (por ejemplo, observar que calcular la media de una lista de números telefónicos no tiene sentido).

   Es importante que trabajemos con nuestro grupo en la búsqueda de bases de datos confiables como el INEGI en el caso de nuestro país. Es posible encontrar una conexión aquí para trabajar con las y los colegas del recurso Lengua y Comunicación.

7. Analiza datos categóricos y cuantitativos de alguna problemática o situación de interés para el estudiantado, a través de algunas de sus representaciones gráficas más sencillas como las gráficas de barras (variables cualitativas) o gráficos de puntos e histogramas (variables cuantitativas). (C1M1, C1M2, C2M2)

Anotaciones didácticas: Se sugiere utilizar este punto de la progresión para dar una primera introducción a conceptos que resultan de importancia en un estudio estadístico como lo son: tendencia estadística, tendencia central, dispersión. Esta introducción se sugiere que se haga de manera intuitiva y visual únicamente, pues se retomará el estudio de estos conceptos más adelante.

8. Analiza cómo se relacionan entre sí dos o más variables categóricas a través del estudio de alguna problemática o fenómeno de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si dichas variables son independientes. (C2M3, C2M4)

   Anotaciones didácticas: Se recomienda tomar ejemplos de casos de las ciencias médicas como el trabajo de Ignaz Semmelweis y John Snow, utilizando tablas de doble entrada.

   Es posible aprovechar esta etapa de la progresión para estudiar el concepto de riesgo relativo en epidemiología y medicina.

9. Analiza dos o más variables cuantitativas a través del estudio de alguna problemática o fenómenos de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si existe correlación entre dichas variables. (C2M3, C2M4)

   Anotaciones didácticas: Se recomienda que, si es posible, se use software libre para analizar el nivel de correlación entre dos variables cuantitativas. Si bien la determinación del coeficiente de Pearson requiere de herramientas estadísticas que se revisarán posteriormente en esta unidad curricular, es posible que en este momento se genere la intuición sobre dicho coeficiente.

   Además se sugiere utilizar este elemento de la progresión para apuntalar ideas relativas con la graficación de funciones y recuperar y reforzar aprendizajes de trayectoria relativos a rectas en el plano.

10. Cuestiona afirmaciones estadísticas y gráficas, considerando valores atípicos (en el caso de variables cuantitativas) y la posibilidad de que existan factores o variables de confusión. (C2M1, C4M2)

    Anotaciones didácticas: Se sugiere revisar algunos ejemplos de la paradoja de Simpson.

11. Identifica, ante la imposibilidad de estudiar la totalidad de una población, la opción de extraer información de ésta a través del empleo de técnicas

de muestreo, en particular, valora la importancia de la aleatoriedad al momento de tomar una muestra. (C2M1, C3M2)

Anotaciones didácticas: Se sugiere revisar de manera intuitiva la variabilidad muestral, pues tener conciencia de ella es importante cuando se estudian temas de estadística inferencial.

12. Valora las ventajas y limitaciones de los estudios observacionales y los compara con el diseño de experimentos, a través de la revisión de algunos ejemplos tomados de diversas fuentes. (C4M1)

13. Describe un fenómeno, problemática o situación de interés para el estudiantado utilizando las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y de dispersión (desviación estándar, varianza, rango intercuartil, etc.) adecuadas al contexto y valora que tipo de conclusiones puede extraer a partir de dicha información. (C2M4, C3M3)

    Anotaciones didácticas: Se sugiere el uso de recursos narrativos como la historieta o el relato breve para trabajar esta progresión.
    Es recomendable que se exploren las limitaciones de las medidas de tendencia central cuando se pretende extraer inferencias a partir de ellas. También es importante que el estudiantado se capaz de interpretar lo que las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión indican del fenómeno estudiado.

14. Explica un evento aleatorio cuyo comportamiento puede describirse a través del estudio de la distribución normal y calcula la probabilidad de que dicho evento suceda. (C2M4, C3M3)

    Anotaciones didácticas: Es importante cuidar la transición hacia el estudio de distribuciones pues es cualitativamente diferente determinar una probabilidad calculando el área bajo una curva.
    Si se tienen la infraestructura se sugiere hacer uso de calculadoras y applets que calculan las áreas bajo la curva descrita por una distribución normal de manera automática, en caso contrario es posible hacer uno de tablas con las que igualmente se pueden calcular estas áreas si se revisa previamente el concepto de estandarización.
    El estudio del área bajo una curva es importante y se retomará al finalizar el tercer semestre es recomendable preparar el terreno para ello desde este momento estimulando la intuición del estudiantado.

15. Valora la posibilidad de hacer inferencias a partir de la revisión de algunas propiedades de la distribución normal y del sentido de la estadística inferencial con la finalidad de modelar y entender algunos fenómenos (C1M3, C2M4, C3M4)

    Anotaciones didácticas: Se sugiere revisar en particular el concepto de prueba de hipótesis y contextualizar su uso en la actualidad, esto se recomienda hacerlo empleando simulaciones para evaluar hipótesis nulas.

6.2. Segundo semestre – Pensamiento aritmético, algebraico y geométrico

6.2.1. Planteamiento general

El tránsito del estudiantado de la aritmética al álgebra suele ser complicado, la organización propuesta en estas líneas busca hacer que éste suceda de manera gradual, de tal forma que las y los estudiantes puedan observar las relaciones y generalizaciones entre ambas. Una de las directrices que se repiten a lo largo de estas progresiones es el entendimiento de que tanto en el álgebra como en la aritmética un motivo que guía nuestros estudios es la búsqueda de la expresión apropiada del objeto matemático para resolver nuestro problema. En ese sentido, se vuelve necesario buscar que nuestras y nuestros estudiantes posean claridad en la manipulación algebraica.

Se busca también que, a través del estudio de propiedades aritméticas de los números enteros y reales, y de propiedades geométricas de diversos objetos matemáticos, el estudiantado trabaje en sus habilidades de observación, sus habilidades para conjeturar y argumentar, para lograr así obtener una intuición educada además de capacidades discursivas que resultan fundamentales en diversos rubros profesionales y de la vida personal. Estudiamos dichas propiedades aritméticas y geométricas a través de mosaicos deductivos, en los cuales se asumen algunos resultados para poder continuar con el desarrollo deductivo, con la condición de que éstos puedan ser revisados con mayor detenimiento en una etapa posterior de aprendizaje.

6.2.2. Aplicación disciplinar

Para trabajar con el estudiantado en el desarrollo de las habilidades del pensamiento matemático se han elegido revisar algunos elementos disciplinares de la aritmética como la divisibilidad (propiedades y algunos criterios), máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Se hace una revisión de la estructura de los números reales emulando su desarrollo histórico: se propone comenzar con algunas propiedades de los números decimales positivos e ir construyendo a través de observaciones a partir de ellos al conjunto de los números reales, de tal forma que solo después de que el estudiantado haya trabajado directamente con dicho objeto matemático podamos presentarlo de manera axiomática considerándolo como un campo ordenado completo.

Se trabaja el lenguaje algebraico a partir de objetos matemáticos con los que el estudiante haya tenido ya un acercamiento previo como los números enteros o los números reales.

Algunos elementos de la matemática financiera son estudiados dada la gran relevancia que tiene el lograr una cierta conciencia financiera para alcanzar una mejor calidad de vida.

Estudiamos sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas centrándonos no tanto en técnicas para resolverlos sino en su contraparte e interpretación geométrica. Llegamos a aplicar algunos de estos conocimientos en el estudio de problemas de optimización donde se emplea el teorema fundamental de la programación lineal.

Se estudian cuadrados pitagóricos y al triángulo de Napoleón considerando que la cabal comprensión de éstos implica en el estudiante una comprensión de los elementos básicos de la geometría euclidiana (Díaz Barriga Alejandro, s.f.).

6.2.3. Metas, categorías y progresiones

1. Compara, considerando sus aprendizajes de trayectoria, el lenguaje natural con el lenguaje matemático para observar que este último requiere de precisión y rigurosidad. (C4M1)

Anotaciones didácticas: en la vida cotidiana encontramos expresiones como "¡Oferta: 3x2 en todas las playeras!", en el lenguaje utilizado en el enunciado de estas ofertas no tiene el mismo sentido que el que le damos en el contexto matemático, obsérvese por ejemplo que no tiene sentido hablar de la conmutatividad, ni de la cerradura de la operación.

Es importante diferenciar el sujeto a quien nos referimos en nuestros enunciados: cuando decimos "María es una chica muy inteligente" y cuando decimos "María tiene 5 letras", aunque parece que hablamos del mismo sujeto, realmente nos referimos a dos entidades distintas; tener claridad en esto es importante para el desarrollo del pensamiento algebraico.

2. Revisa algunos elementos de la sintaxis del lenguaje algebraico considerando que en el álgebra buscamos la expresión adecuada al problema que se pretende resolver (utilizamos la expresión simplificada, la expresión desarrollada de un número, la expresión factorizada, productos notables, según nos convenga). (C1M1, C4M2)

   Anotaciones didácticas: Para dar más sentido a la introducción del lenguaje algebraico —fundamental para lograr un pensamiento algebraico— se sugiere mostrar que el quehacer algebraico consiste muchas veces en la búsqueda de la expresión adecuada al problema: Si un mecánico solicita una llave de ½ y su ayudante le pasa dos llaves de ¼, a pesar de que ¼ + ¼ = ½ no podemos decir que el ayudante cumpliera satisfactoriamente la consigna; de igual manera, si le pedimos a un estudiante que nos diga cuánto es la suma de los números tres y dos y él nos responde $3 + 2$ o $\sqrt{25}$, aunque no teníamos en mente dicha respuesta el o la estudiante estaría respondiendo algo cierto: lo que debimos solicitarle fue la expresión simplificada de la suma de los números tres y dos. En resumen, hay que tener cuidado con el lenguaje al solicitar una tarea.

   Un problema para trabajar sintaxis algebraica y el uso del sistema decimal es el siguiente: hay un mago que descubre el mes y el día del nacimiento de cualquier persona, lo único que tienes que hacer es decirle el resultado de las siguientes operaciones: el número del mes en el que naciste lo multiplicas por 2, se le suma 22, al resultado lo multiplicas por 5, después se le resta 8 y al resultado se multiplica por 10, al resultado se le suma 14, después se le suma el día en que naciste y por último al resultado se suma

31. (El mago restando a dicha cantidad 1065 puede adivinar el día y el mes en que naciste) ¿Cómo hace el mago para descubrirlo?

Muchos de los elementos procedurales de esta progresión pueden dejarse para estudio en casa.

3. Examina situaciones que puedan modelarse utilizando lenguaje algebraico y resuelve problemas en los que se requiere hacer una transliteración entre expresiones del lenguaje natural y expresiones del lenguaje simbólico del algebra. (C1M2, C3M2, C4M1)

   Anotaciones didácticas: se sugiere emplear problemas como el siguiente, el cual fue tomado del libro "Álgebra recreativa" de Yakov Perelman: "Un caballo y un mulo caminan juntos, el caballo se queja de su carga, el mulo le dice *¿de qué te quejas? Si yo tomara un saco de la tuya mi carga sería el doble de la tuya. En cambio, si te doy uno de mis sacos, tu carga se iguala a la mía, así que no tienes por qué quejarte pues yo llevo más sacos que tú*. ¿Cuántos sacos lleva el caballo? ¿Cuántos sacos lleva el mulo?"

   Con este tipo de problemas se busca que el estudiantado domine con mayor sofisticación el uso del lenguaje algebraico.

4. Explica algunas relaciones entre números enteros utilizando conceptos como el de divisibilidad, el de número primo o propiedades generales sobre este conjunto numérico, apoyándose del uso adecuado del lenguaje algebraico. (C2M2, C4M2)

   Anotaciones didácticas: Decimos que un entero divide a otro, si existe una expresión del segundo como el primero multiplicado por algún entero. Obsérvese que una teoría de divisibilidad se trivializa si se trabaja con la totalidad de los números reales, pues cualquier número distinto de cero dividiría a cualquier otro.

   Se sugiere trabajar con pruebas de divisibilidad, revisar cómo dichas pruebas se utilizan en los algoritmos de detección de errores que emplean los sistemas como el ISBN, la seriación de fármacos, en la lectura de dígitos de tarjetas de crédito, etc.

   Es recomendable analizar algunas propiedades interesantes del conjunto de números primos como que dicho conjunto es infinito. Se recomienda discutir con las y los estudiantes algunas de las aplicaciones más recientes de la aritmética, por ejemplo, la criptografía, no con la intención de que se comprenda en su totalidad el tema, sino que sirva al estudiantado para observar el poder de la matemática y que es una ciencia que continúa desarrollándose.

5. Conceptualiza el máximo común divisor (M.C.D.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números enteros y los aplica en la resolución de problemas. (C1M1, C1M3, C3M3)

6. Revisa desde una perspectiva histórica al conjunto de los números reales, comenzando con la consideración de números decimales positivos hasta llegar a la presentación de la estructura de campo ordenado de los números reales. (C1M3, C2M1)

   Anotaciones didácticas: En este punto las y los estudiantes cuentan con los aprendizajes de trayectoria obtenidos del trabajo que se hizo con este conjunto numérico en el razonamiento estadístico y probabilístico. Para que este estudio sea significativo.

   Es importante ir construyendo las propiedades de los reales sobre conocimientos previos, comenzando con números decimales positivos e ir construyendo sobre ellos hasta llegar a la presentación axiomática de los reales como un campo ordenado completo.

   Es recomendable emplear retos para introducir algunas propiedades interesantes de este conjunto numérico.

7. Resuelve situaciones-problema significativas para el estudiantado que involucren el estudio de proporcionalidad tanto directa como inversa, así como también el estudio de porcentajes, empleando la estructura algebraica de los números reales. (C2M3, C3M4)

8. Discute la conformación de un proyecto de vida considerando elementos básicos de la matemática financiera tales como interés simple y compuesto, ahorros y deudas a través de la aplicación de la estructura algebraica de los números reales y con la finalidad de promover la toma de decisiones más razonadas. (C3M2, C4M1, C4M2)

   Anotaciones didácticas: se sugiere discutir con las y los estudiantes sus proyectos de vida, en un ambiente de respeto y cuidado de la componente socioemocional, para que con base en ello se introduzca la necesidad de una planeación financiera.

9. Conceptualiza el área de una superficie y deduce fórmulas para calcular áreas de figuras geométricas simples como rectángulos, triángulos,

trapecios, etc., utilizando principios y propiedades básicas de geometría sintética. (C1M2, C2M2, C2M4)

Anotaciones didácticas: cuando se considera el concepto de área de una superficie partiendo de la idea de cubrirla con cuadrados cuyos lados tengan longitud unitaria es importante cuidar que al cubrir la superficie dichos cuadrados no se traslapen y que no existan zonas de la superficie sin cubrir por los cuadrados. Estas ideas pueden resultar útiles al estudiantado si en el futuro deciden estudiar temas relativos al cálculo integral.

10. Revisa el teorema del triángulo de Napoleón, considerándolo como un problema-meta en el que se aplican resultados de la geometría euclidiana como: Teorema de Pitágoras, criterios de congruencia y semejanza de triángulos, caracterizaciones de cuadriláteros concíclicos, entre otros. (C2M1, C2M4, C4M2, C4M3)

    Anotaciones didácticas: Se recomienda tener especial cuidado en la estructura de los enunciados, buscar apoyado por algún software libre como GeoGebra que él o la estudiante conjeture de tal manera que identifique las hipótesis de los teoremas y sus conclusiones, preguntarse por la veracidad de los recíprocos, por ejemplo, del teorema de Pitágoras.

    Con este estudio es posible presentar un mosaico deductivo, es decir, trabajar localmente en geometría euclidiana. Se pretende guiar al estudiante para que pueda conjeturar y hacer deducciones locales argumentando a favor de teoremas, no a partir de los axiomas de la geometría, sino de hechos que se suponen ciertos y que el estudiante conoce o se pide que sean creídos a condición de que en un momento posterior se prueben a partir de hechos que sí conozca. (Díaz Barriga, Alejandro, s.f.).

11. Emplea un sistema de coordenadas y algunos elementos básicos de geometría analítica como la distancia entre dos puntos en el plano para calcular áreas de figuras geométricas básicas y compara estos resultados con los cálculos obtenidos empleando principios básicos de geometría sintética. (C1M2, C3M1)

    Anotaciones didácticas: Las y los estudiantes poseen aprendizajes de trayectoria del razonamiento estadístico y probabilístico referentes a sistemas de coordenadas y rectas en el plano cartesiano, es muy recomendable que en este punto de la progresión se refuercen dichos aprendizajes de trayectoria sobre todo los referentes al estudio de rectas en el plano pues serán fundamentales para los estudios posteriores.

12. Modela situaciones y resuelve problemas significativos para el estudiantado tanto de manera algebraica como geométrica al aplicar propiedades básicas de funciones lineales, cuadráticas y polinomiales. (C3M2)

    Anotaciones didácticas: Con este elemento de la progresión se prepara el camino para que la y el estudiante adquieran familiaridad con el concepto de función que será central dentro del pensamiento variacional, se debe tener en cuenta los aprendizajes de trayectoria que se proyecta que los estudiantes adquieran de tal forma que se apuntalen desde este momento, sobre todo considerando los requerimientos del pensamiento variacional con respecto a funciones.

13. Resuelve problemáticas provenientes de las áreas del conocimiento que involucren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y considera una interpretación geométrica de estos sistemas. (C3M3)

    Anotaciones didácticas: Se sugiere no dar un especial énfasis a los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales sino procurar una comprensión conceptual de dichos objetos matemáticos, teniendo en cuenta la interpretación geométrica de los mismos y considerando los efectos que las operaciones elementales tienen sobre los objetos geométricos asociados al sistema de ecuaciones lineales.

    Es posible motivar el estudio de sistemas de ecuaciones lineales al estudiar problemáticas de las ciencias naturales, experimentales y tecnología como lo es el estudio de las reacciones químicas.

14. Modela situaciones y resuelve problemas en los que se busca optimizar valores aplicando el teorema fundamental de la programación lineal y combinando elementos del lenguaje algebraico que conciernen al estudio de desigualdades y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (C2M4, C3M4, C4M3)

    Anotación didáctica: Con este elemento de la progresión no se pretende que el o la estudiante demuestre el teorema antes citado, pues dicha demostración sale del alcance del curso, aunque es fácil intuir la demostración del teorema en el plano y con esto profundizar el concepto de rectas paralelas y de pendiente de una recta. Se pide aplicar el teorema en la resolución de problemas del siguiente tipo:

"Cindy requiere juntar algo de dinero para un viaje, como ella sabe repostería decide elaborar y vender pastelillos de chocolate y de vainilla con fruta. Para hacer una docena de pastelillos de chocolate necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla y para hacer una docena de pastelillos de vainilla con fruta necesita 6 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para elaborar pastelillos solamente cuenta con 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27.5 kg de mantequilla. Su idea es vender a $200 cada docena de pastelillos de chocolate y vender a $300 cada docena de pastelillos de vainilla con frutos. Con esos datos, ¿cuántas docenas de cada tipo de pastelillo debe elaborar para obtener la ganancia máxima?"

6.3. Tercer semestre – Pensamiento variacional

6.3.1. Planteamiento general

El pensamiento variacional es un componente indispensable para las ciencias y la tecnología, sin la herramienta teórica suministrada por el cálculo para representar y modelar situaciones y fenómenos el nivel de comprensión que tiene la humanidad sobre la realidad sería deficiente.

No solamente es la realidad física la que puede explicarse a través del pensamiento variacional, también la comprensión de algunos sistemas biológicos, fenómenos epidemiológicos y sociales pueden ser explicados con la ayuda del pensamiento variacional.

Para comprender nuestra realidad es necesario tener conciencia sobre lo que varía. El cambio es una parte constitutiva de la vida, es por ello por lo que el estudio de la variación desde el pensamiento matemático se vuelve fundamental en la formación humana de nuestras y nuestros jóvenes.

6.3.2. Aplicación disciplinar

Para favorecer en el estudiantado el desarrollo de habilidades relacionadas con el pensamiento variacional se han elegido algunos elementos disciplinares del cálculo que a continuación enumeraremos.

No divorciamos a la matemática de su componente humanista, partimos de revisar algunos de los estudios más relevantes sobre cambio y movimiento que han tenido lugar, desde la antigüedad, en el pensamiento de algunos filósofos y como éstos fueron evolucionando hasta llegar a la concepción matematizada de la realidad de Galileo y la invención del cálculo por Leibniz y Newton. Se estudia también cómo algunas de estas ideas estuvieron presentes en la humanidad mucho antes de cristalizarse y formalizarse.

La perspectiva que adoptamos es la de un punto medio entre la intuición original de los infinitesimales y el desarrollo formal de la disciplina: asumimos algunas leyes sobre límites de funciones reales de variable real y sobre ellas construimos nuevos conocimientos. Es notable el tiempo que le costó a la humanidad lograr formalizar satisfactoriamente estas ideas, es por ello que nos colocamos en un punto intermedio entre la intuición y la formalidad.

Se revisa el concepto de continuidad y diferenciabilidad y la relación entre ellos (toda función derivable es continua, pero no toda función continua es derivable), se busca que el estudiantado genere intuiciones acerca de las implicaciones de la continuidad y diferenciabilidad.

Se utilizan algunas propiedades de la derivada para estudiar gráficas de funciones y determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de funciones, la concavidad o convexidad de gráficas, su puntos máximos o mínimos relativos, etc.

Analizamos problemas de optimización empleando técnicas del cálculo diferencial y abordamos la modelación de fenómenos a través del uso de funciones reales de variable real. Se espera que el estudiantado, al finalizar esta unidad curricular de aprendizaje, sea capaz de proponer un modelo sencillo para explicar algún fenómeno, aunque no se espera que la ecuación diferencial que lo describe pueda ser resuelta, pues no se tratan en este semestre las técnicas necesarias para hacerlo sino que se posponen para un curso más avanzado.

Se concluye el curso con una revisión somera del teorema fundamental del cálculo y la relación que tiene éste con el estudio emprendido en la primera unidad curricular cuando se revisaban áreas debajo de una curva.

6.3.3. Metas, categorías y progresiones

1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y

algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. (C2M1)

Anotaciones didácticas: las ideas centrales del cálculo estuvieron latentes en la humanidad desde la antigüedad, se sugiere presentar alguno de estos desarrollos con el lenguaje actual, pero sin pretender formalizar los conceptos en esta primera introducción.

Es posible revisar el ejemplo de Arquímedes sobre la aproximación del área de una circunferencia utilizando polígonos regulares inscritos (en este caso se estaría haciendo uso de funciones trigonométricas para lo cual se apela a los aprendizajes de trayectoria que el estudiantado posee, dicho tema se revisará posteriormente). Otra posibilidad es estudiar algunas de las paradojas de Zenón desde el punto de vista matemático y aprovechar para trabajar transversalmente con Humanidades.

2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. (C3M1, C4M1)

   Anotaciones didácticas: en este punto de la progresión no se pretende resolver dichos problemas, pues será necesario hacer una revisión más profunda del concepto de derivada, cosa que se hará posteriormente. Se busca que el estudiantado tenga un acercamiento intuitivo y heurístico a los problemas que dieron origen al cálculo. De ser necesario, se puede aprovechar este momento para hacer una revisión de aprendizajes de trayectoria relativos a la geometría sintética y de los elementos básicos de geometría analítica tratados en la segunda unidad de aprendizaje de pensamiento matemático.

3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas. (C3M1)

   Anotaciones didácticas: se sugiere buscar situaciones y fenómenos interesantes para el estudiantado, las actividades deportivas pueden ser un buen ejemplo.

   Es posible revisar el estudio que hace Galileo sobre los cuerpos en caída libre, es recomendable hacer uso de software libre como Tracker y GeoGebra para introducir el estudio de funciones reales de variable real en la modelación.

Una recomendación importante es que se busque contextualizar en la modelación a las operaciones básicas de funciones (suma, resta, multiplicación, composición, etc.)

4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático. (C3M1)

   Anotaciones didácticas: posteriormente en esta unidad de aprendizaje, cuando se cuente con la herramienta suficiente del cálculo, podrán revisarse técnicas y procedimientos para describirlos a través de la derivada. En este punto se espera únicamente un tratamiento intuitivo y conceptual.

5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función. (C1M1, C2M2, C4M1)

   Anotaciones didácticas: No se pretende que el estudiantado trabaje de manera rigurosa y formal el concepto de límite (definición épsilon-delta), sino más bien que, asumiendo algunas “leyes de los límites” pueda utilizar dicho concepto.

   Si el grupo lo permite, es posible hacer una revisión breve de límites infinitos.

6. Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación. (C2M1, C4M2)

   Anotaciones didácticas: se da seguimiento al trabajo hecho en el punto 4. donde se revisa el concepto de continuidad de una función, pero en este momento se formaliza a través de la herramienta estudiada en 5.

   Es posible, si las condiciones del grupo lo permiten, revisar en este punto de manera intuitiva el teorema fundamental del valor intermedio y concluir que toda función polinomial de grado impar tiene, por fuerza, al menos una raíz real.

7. Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, “la derivada”, de forma intuitiva e

intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales. (C1M2, C2M2)

Anotaciones didácticas: Entre las nociones de derivada que buscan integrarse están: la derivada como la pendiente de la recta tangente de una curva en un punto; la derivada como razón de cambio, en particular la derivada como velocidad instantánea.

8. Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos. (C2M3, C3M4)

   Anotaciones didácticas: Es importante procurar no volver este curso un curso únicamente procedural, por ello se sugiere concentrarse en la búsqueda heurística de dichas reglas más que en su aplicación mecanicista.

   Dando continuidad a la progresión 3., es recomendable utilizar este punto de la progresión para seguir revisando operaciones con funciones, incluso utilizando funciones trigonométricas y exponenciales, en el entendido que el estudio formal se llevará a cabo posteriormente (i.e. dar primeros vistazos a funciones especiales).

   Si el o la docente no encuentra las condiciones para la búsqueda heurística de algunas de las reglas de derivación antes citadas, se sugiere asumirlas para aplicarlas posteriormente en problemas significativos para el estudiantado que tengan que ver con modelación.

9. Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea. (C2M2)

   Anotaciones didácticas: pueden, por ejemplo, revisarse la ley de enfriamiento de Newton (no se busca que se resuelva una ecuación diferencial, pero se puede hablar brevemente sobre su planteamiento), el estudio del llenado y/o vaciado de recipientes, entre otros.

10. Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica. (C1M3, C2M4, C4M2)

    Anotaciones didácticas: de ser posible es recomendable el uso de software libre como GeoGebra para este punto de la progresión con la finalidad de ver a la derivada de una función como una función y con ello extraer información de la función original a partir de la gráfica de su derivada.

11. Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate. (C2M4, C3M4, C4M2)

    Anotaciones didácticas: Se sugiere revisar temas de economía matemática como costos, ingresos, ganancias, costos marginales, entre otros. Si se elige explorar este tema es importante hacer un comentario sobre cómo se están empleando funciones de variable continua para modelar objetos discretos.

    En este punto de la progresión es posible analizar el problema de encontrar la caja de volumen máximo a partir de una lámina rectangular al que se le hacen unos cortes en las esquinas para luego levantar las paredes de la caja, como recomendación podemos decir que es importante aprovechar la oportunidad para que nuestras y nuestros estudiantes desarrollen habilidades que les permitan modelar fenómenos, en ese sentido no podemos comenzar nosotros como docentes nombrando con “x” a la longitud del doblez de la caja, pues parte del proceso de modelación es llevar a las y los estudiantes a que encuentren cuál debe ser la variable adecuada para modelar el fenómeno.

12. Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí. (C2M3, C3M2)

13. Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas. (C2M2, C3M2)

14. Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables. (C2M4, C3M2, C4M3)

    Anotación didáctica: es importante resaltar que en este punto no se pretende que el estudiantado sea capaz de resolver una ecuación diferencial, pero se sugiere trabajar un poco en que el estudiantado sea capaz de plantear alguna ecuación diferencial como aquella que describe el decaimiento radiactivo, el modelo presa-depredador, el crecimiento bacteriano, entre otros. Hacemos un énfasis en que el estudiantado, en este punto, no cuenta con la herramienta suficiente para ser capaz de resolver ecuaciones diferenciales, se pretende únicamente dar un acercamiento.

Se sugiere emplear herramientas didácticas como la historieta o el relato para analizar algunos de estos modelos y buscar conexiones con Lengua y Comunicación, Humanidades y otras áreas o recursos del Marco Curricular Común.

En este punto es posible dar un acercamiento al estudiantado a la revisión de cómo técnicas del cálculo fueron empleadas en la modelación de la pandemia de COVID-19, no se pretende que se comprendan los detalles, sino compartirlos en un formato de plática para motivar al estudiantado a continuar con estos estudios.

También es sumamente importante llevar a nuestras y nuestros estudiantes a observar cómo en diversos fenómenos complejos intervienen una gran cantidad de variables, lo cual hace imposible que podamos predecir con exactitud el comportamiento de dicho fenómeno. Como ejemplo podemos abordar los estudios de Eduard Lorenz, James A. York y Benoît Mandelbrot, sobre el caos y la fractalidad a un nivel divulgativo, retomando ideas vistas en Pensamiento Matemático I sobre la incertidumbre.

15. Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo. (C2M4)

Anotaciones didácticas: la discusión que se propone hacer en el aula en este punto es de carácter intuitivo. Se sugiere relacionar este punto de la progresión con el estudio hecho en la primera unidad curricular de pensamiento matemático en donde se estudiaba la distribución normal y la probabilidad como el área bajo una curva.

VII. Anexo

A continuación, compartimos una tabla integradora donde aparecen las categorías y subcategorías del pensamiento matemático, así como los aprendizajes de trayectoria, metas de aprendizaje y las progresiones de aprendizaje de los primeros tres semestres de Pensamiento Matemático.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO			
Categoría			
Procedural	**Procesos de Intuición y Razonamiento**	**Solución de problemas y modelación**	**Interacción y lenguaje matemático**
Subcategorías			
Elementos aritmético-algebraicos.	Capacidad para observar y conjeturar	Uso de modelos	Registro escrito, simbólico, algebraíco e iconográfico
Elementos geométricos	Pensamiento intuitivo	Construcción de Modelos	Negociación de significados
Elementos variacionales Manejo de datos e incertidumbre	Pensamiento formal	Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	Ambiente matemático de Comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje

áreas del conocimiento y de su vida personal.	conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.)		matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			
C1M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos de las ciencias y de su entorno.	C2M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	C3M1 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	C4M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
C1M2 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	C2M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	C3M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto	C4M2 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.

		teórico como de su entorno.	
C1M3 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	C2M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	C3M3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	C4M3 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o evaluación.
	C2M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	C3M4 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

Progresiones de aprendizaje de Pensamiento Matemático I
1. Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad. Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas. (C2M1). 2. Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de la consulta de datos o simulaciones, considera la frecuencia con la que un evento puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda (C2M1, C2M2). 3. Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica (C1M1, C3M1, C4M1). 4. Elige una técnica de conteo (ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones, combinaciones) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones. Las técnicas de conteo se introducen para entender la probabilidad de eventos aleatorios en los que la expresión explícita de su espacio muestral es poco factible. (C1M2, C1M3, C3M3) 5. Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales. La introducción de la actualización de probabilidades se hace a través de simulaciones y sólo después se aborda el teorema de Bayes. (C2M4) 6. Selecciona una problemática o situación de interés, con la finalidad de recolectar información y datos de fuentes confiables e identifica las variables relevantes para su estudio. (C1M1, C2M1, C4M2) 7. Analiza datos categóricos y cuantitativos de alguna problemática o situación de interés para el estudiantado, a través de algunas de sus representaciones gráficas más sencillas como las gráficas de barras (variables cualitativas) o gráficos de puntos e histogramas (variables cuantitativas). (C1M1, C1M2, C2M2)

8. Analiza cómo se relacionan entre sí dos o más variables categóricas a través del estudio de alguna problemática o fenómeno de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si dichas variables son independientes. (C2M3, C2M4)
9. Analiza dos o más variables cuantitativas a través del estudio de alguna problemática o fenómenos de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si existe correlación entre dichas variables. (C2M3, C2M4)
10. Cuestiona afirmaciones estadísticas y gráficas, considerando valores atípicos (en el caso de variables cuantitativas) y la posibilidad de que existan factores o variables de confusión. (C2M1, C4M2)
11. Identifica, ante la imposibilidad de estudiar la totalidad de una población, la opción de extraer información de ésta a través del empleo de técnicas de muestreo, en particular, valora la importancia de la aleatoriedad al momento de tomar una muestra. (C2M1, C3M2)
12. Valora las ventajas y limitaciones de los estudios observacionales y los compara con el diseño de experimentos, a través de la revisión de algunos ejemplos tomados de diversas fuentes. (C4M1)
13. Describe un fenómeno, problemática o situación de interés para el estudiantado utilizando las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y de dispersión (desviación estándar, varianza, rango intercuartil, etc.) adecuadas al contexto y valora que tipo de conclusiones puede extraer a partir de dicha información. (C2M4, C3M3)
14. Explica un evento aleatorio cuyo comportamiento puede describirse a través del estudio de la distribución normal y calcula la probabilidad de que dicho evento suceda. (C2M4, C3M3)
15. Valora la posibilidad de hacer inferencias a partir de la revisión de algunas propiedades de la distribución normal y del sentido de la estadística inferencial con la finalidad de modelar y entender algunos fenómenos (C1M3, C2M4, C3M4)

Progresiones de aprendizaje de Pensamiento Matemático II

1. Compara, considerando sus aprendizajes de trayectoria, el lenguaje natural con el lenguaje matemático para observar que este último requiere de precisión y rigurosidad. (C4M1)
2. Revisa algunos elementos de la sintaxis del lenguaje algebraico considerando que en el álgebra buscamos la expresión adecuada al problema que se pretende resolver (utilizamos la expresión simplificada, la expresión desarrollada de un número, la expresión factorizada, productos notables, según nos convenga). (C1M1, C4M2)

3. Examina situaciones que puedan modelarse utilizando lenguaje algebraico y resuelve problemas en los que se requiere hacer una transliteración entre expresiones del lenguaje natural y expresiones del lenguaje simbólico del algebra. (C1M2, C3M2, C4M1)
4. Explica algunas relaciones entre números enteros utilizando conceptos como el de divisibilidad, el de número primo o propiedades generales sobre este conjunto numérico, apoyándose del uso adecuado del lenguaje algebraico. (C2M2, C4M2)
5. Conceptualiza el máximo común divisor (M.C.D.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números enteros y los aplica en la resolución de problemas. (C1M1, C1M3, C3M3)
6. Revisa desde una perspectiva histórica al conjunto de los números reales, comenzando con la consideración de números decimales positivos hasta llegar a la presentación de la estructura de campo ordenado de los números reales. (C1M3, C2M1)
7. Resuelve situaciones-problema significativas para el estudiantado que involucren el estudio de proporcionalidad tanto directa como inversa, así como también el estudio de porcentajes, empleando la estructura algebraica de los números reales. (C2M3, C3M4)
8. Discute la conformación de un proyecto de vida considerando elementos básicos de la matemática financiera tales como interés simple y compuesto, ahorros y deudas a través de la aplicación de la estructura algebraica de los números reales y con la finalidad de promover la toma de decisiones más razonadas. (C3M2, C4M1, C4M2)
9. Conceptualiza el área de una superficie y deduce fórmulas para calcular áreas de figuras geométricas simples como rectángulos, triángulos, trapecios, etc., utilizando principios y propiedades básicas de geometría sintética. (C1M2, C2M2, C2M4)
10. Revisa el teorema del triángulo de Napoleón, considerándolo como un problema-meta en el que se aplican resultados de la geometría euclidiana como: Teorema de Pitágoras, criterios de congruencia y semejanza de triángulos, caracterizaciones de cuadriláteros concíclicos, entre otros. (C2M1, C2M4, C4M2, C4M3)
11. Emplea un sistema de coordenadas y algunos elementos básicos de geometría analítica como la distancia entre dos puntos en el plano para calcular áreas de figuras geométricas básicas y compara estos resultados con los cálculos obtenidos empleando principios básicos de geometría sintética. (C1M2, C3M1)

12. Modela situaciones y resuelve problemas significativos para el estudiantado tanto de manera algebraica como geométrica al aplicar propiedades básicas de funciones lineales, cuadráticas y polinomiales. (C3M2)
13. Resuelve problemáticas provenientes de las áreas del conocimiento que involucren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y considera una interpretación geométrica de estos sistemas. (C3M3)
14. Modela situaciones y resuelve problemas en los que se busca optimizar valores aplicando el teorema fundamental de la programación lineal y combinando elementos del lenguaje algebraico que conciernen al estudio de desigualdades y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (C2M4, C3M4, C4M3)

Progresiones de aprendizaje de Pensamiento Matemático III

1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. (C2M1)
2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. (C3M1, C4M1)
3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas. (C3M1)
4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático. (C3M1)
5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función. (C1M1, C2M2, C4M1)
6. Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función

tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación. (C2M1, C4M2)

7. Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, “la derivada”, de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales. (C1M2, C2M2)
8. Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos. (C2M3, C3M4)
9. Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea. (C2M2)
10. Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica. (C1M3, C2M4, C4M2)
11. Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate. (C2M4, C3M4, C4M2)
12. Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí. (C2M3, C3M2)
13. Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas. (C2M2, C3M2)
14. Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables. (C2M4, C3M2, C4M3)
15. Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo. (C2M4)

VIII. Referencias documentales

Arteaga, E. (s.f.). *Calidad y Creatividad en Educación Matemática.* Obtenido de http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_47/nr_503/a_6889/6889.html

Cerda, J., & Valdivia, G. (s.f.). *John Snow, la epidemia de cólera y el nacimiento de la epidemiología moderna.* Revista chilena de infectología. Obtenido de https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0716-10182007000400014

Chance, B., & Rossman, A. (2006). Using simulation to teach and learn statistics. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, 1-16.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (2012). The Coordination of Psychological and Sociological Perspectives in Mathematics Education. En *The emergence of mathematical meaning* (págs. 11-26). Routledge.

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. (2020). *Repensar la evaluación para la mejora educativa: resultados de México en PISA 2018.* México.

Deane, P., Sabatini, J., & O´Reilly, T. (2012). The CBAL English language arts (ELA) competency model and provisional learning progressions. Obtenido de http://elap.cbalwiki.ets.org/Outline+of+Provisional+Learning+Progressions

Díaz Barriga, A. (s.f.). *Triángulo de Napoleón y cuadrados pitagóricos.* Obtenido de https://drive.google.com/file/d/1GvDtXkvaRjIQCKe3VmIBR189eEyDrxie/view?usp=sharing

Díaz-Barriga, Á. (2013). *Un enfoque de competencias en la Educación ¿Una alternativa o un disfraz de cambio?* México: Perfiles Educativos. Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/132/13211102.pdf

Díaz-Barriga, F. (2006). *Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida.* Ed. McGraw Hill.

Drake, S. M., & Burns, R. C. (2004). Meeting standards through integrated curriculum. ASCD.

Eronen, L., Kokko, S., & Sormunen, K. (2019). Escaping the subject-based class: A Finnish case study of developing transversal competencies in a transdisciplinary course. *The Curriculum Journal, 30(3)*, 264-278.

García, B., & Botello, A. (2018). *Relación entre el pensamiento crítico y el desempeño académico en los alumnos de escuela preparatoria.* Educar.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (s.f.). Articulando conocimientos y compentencias del profesor de matemáticas: el modelo OCCDM. Obtenido de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_2016_Modelo_CCDM_SEIEM_M%C3%A1laga.pdf

Hitt, F., & Quiroz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. *Revista colombiana de educación, (73)*, 153-177.

Kline, M. (1977). *El fracaso de la matemática moderna: ¿por qué Juanito no sabe sumar?* México: Siglo XXI Editores.

Merino, A. (2016). *Inicio al Método ABN*. Obtenido de https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/web/172922gt164.

Miranda, F. (2018). *Abandono escolar en educación media superior: conocimiento y aportaciones de política pública*. doi: https://doi.org/10.31391/S2007-7033(2018)0051-010

Miranda, M., & Navarrete, L. (2008). Semmelweis y su aporte científico a la medicina: Un lavado de manos salva vidas. *Revista chilena de infectología*. Obtenido de https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0716-10182008000100011

NCTM. (2014). *Principios para la Acción*. Obtenido de https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Principles_to_Actions/PtAExecutiveSummary_Spanish.pdf

OCDE. (2019). *Programa para la evaluación internacional de los alumno.* Obtenido de s https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

OECD. (2010). *Education working Papers.*

Osuna, C., & López, K. D. (2020). El logro de los aprendizajes en matemáticas en PISA, ENLACE y PLANEA en adolescentes mexicanos. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7443998

Peña, J. A. (Ed.). (2002). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México.* México: Siglo XXI.

Perelman, Y. (1969). *Álgebra Recreativa.* (E. MIR, Ed.)

Rojano, M., & et., a. (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países.* INEE-CINESTAV.

Rossman, A. J. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician´s view. *Statistics Education Research, 7(2)*, 5-19.

Rossman, A. J., & Chance, B. L. (2011). *Workshop statistics: discovery with data.* John Wiley & Sons.

SEP. (2017). *Aprendizajes Clave.* Obtenido de https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf

SEP. (2017). *Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la Educación Media Superior.* Obtenido de http://www.sems.gob.mx/curriculoems/planes-de-estudio-de-referencia

SEP. (2018). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior.* Obtenido de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/241519/planes-estudio-sems.pdf

SEP. (2018). *Planes y programas de estudio para la Educación Básica.* Obtenido de https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy form a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(2)*, 114-145.

Stewart, J. (2018). *Single variable calculus: Concepts and contexts.* Cengage Learning.

Taguma, M., Gabriel, F., & Meow, H. (2019). *Future of Education and Skills 2030: Curriculum analysis: A Synthesis of Research on Learning Trajectories/Progressions in Mathematics.* Obtenido de https://www.oecd.org/education/2030/A-Synthesis-of-Research-on-Learning-Trajectories-Progressions-in-Mathematics.pdf

REDISEÑO DEL MARCO CURRICULAR COMÚN DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Asesoría técnica, académica y pedagógica

Juan Pablo Arroyo Ortiz
Alejandro Javier Díaz Barriga Casales
Adriana Olvera López

Irma Irene Bernal Soriano
Mariela Esquivel Solís
José Francisco Barrón Tovar
Adán Martínez Hernández
Víctor Florencio Ramírez Hernández
Ana Laura Soto Hernández

Rodrigo Salomón Pérez Hernández
Liliana Isela Robles Ponce
Ernesto Bartolucci Blanco
María Rosa Guadalupe H. Mondragón
Andrés Alonso Flores Marín
Alberto Hugo Parraguirre Covarrubias
Alexis Haziel Ángeles Juárez.

Claudia Ivette Gaona Salado
María Elena Pérez Campuzano

Diseño gráfico
José Armando López Chávez
Jonatan Rodrigo Gómez Vargas

La construcción del MCCEMS no hubiera sido posible sin la valiosa contribución de múltiples voces y opiniones a lo largo del país. Agradecemos en especial las importantes aportaciones del Dr. Alejandro Javier Díaz Barriga Casales, las cuales han sido cruciales para fundamentar y concretar esta propuesta académica.
La Subsecretaría de Educación Media Superior agradece y reconoce a todos aquellos y aquellas que colaboraron en la construcción del MCCEMS con sus invaluables aportaciones.

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Coordinación Sectorial de Fortalecimiento Académico
2023

EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA