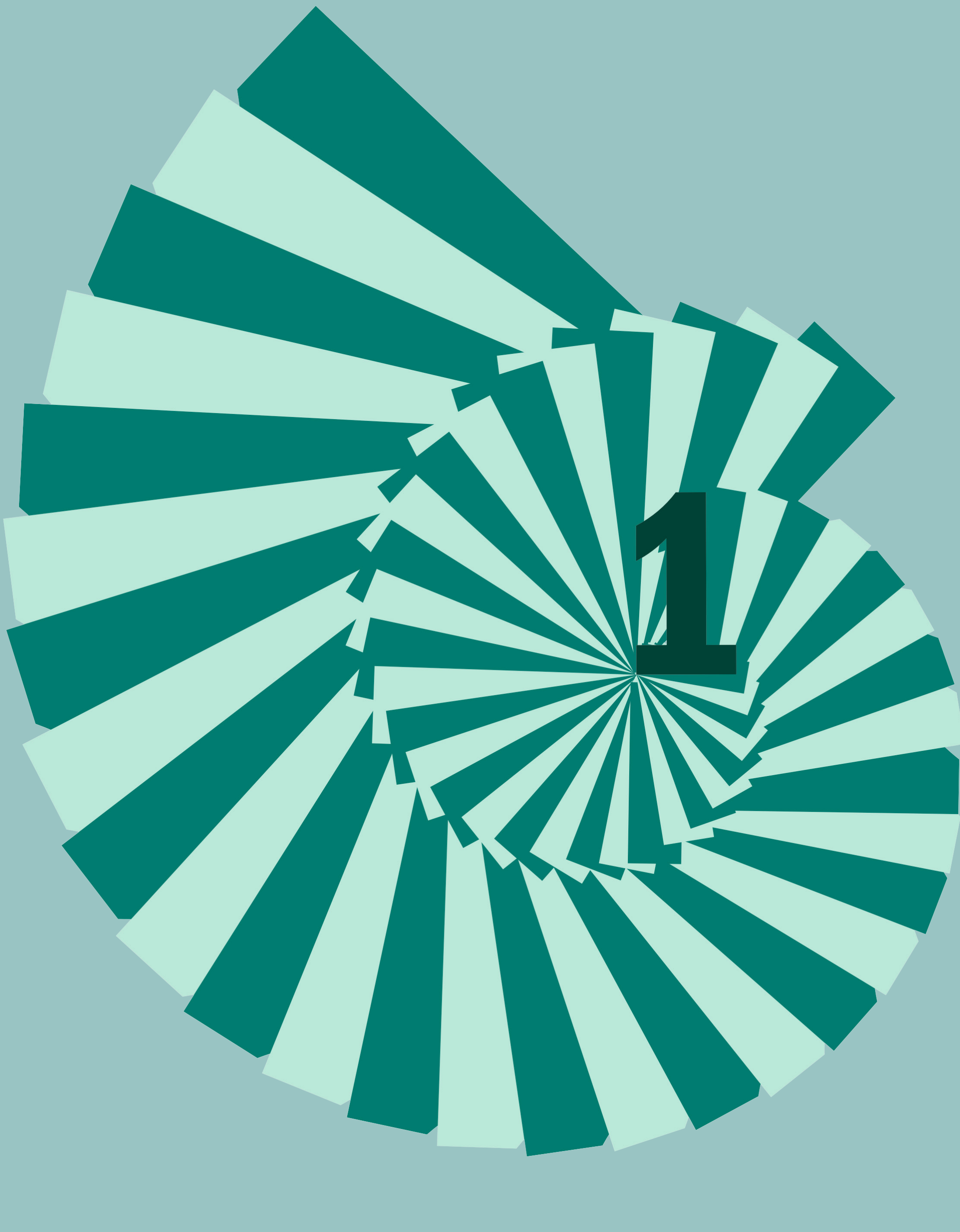
La proporcionalidad:

DOS MANERAS DE ENSEÑAR Y APRENDER LAS MATEMÁTICAS

Santiago Palmas


1

1

Secretaría de Educación Pública

Mtro. Aurelio Nuño Mayer
Secretario de Educación Pública

Dr. Rodolfo Tuirán Gutiérrez
Subsecretario de Educación Media Superior

Mtro. Daniel Hernández Franco
Coordinador Sectorial de Desarrollo Académico

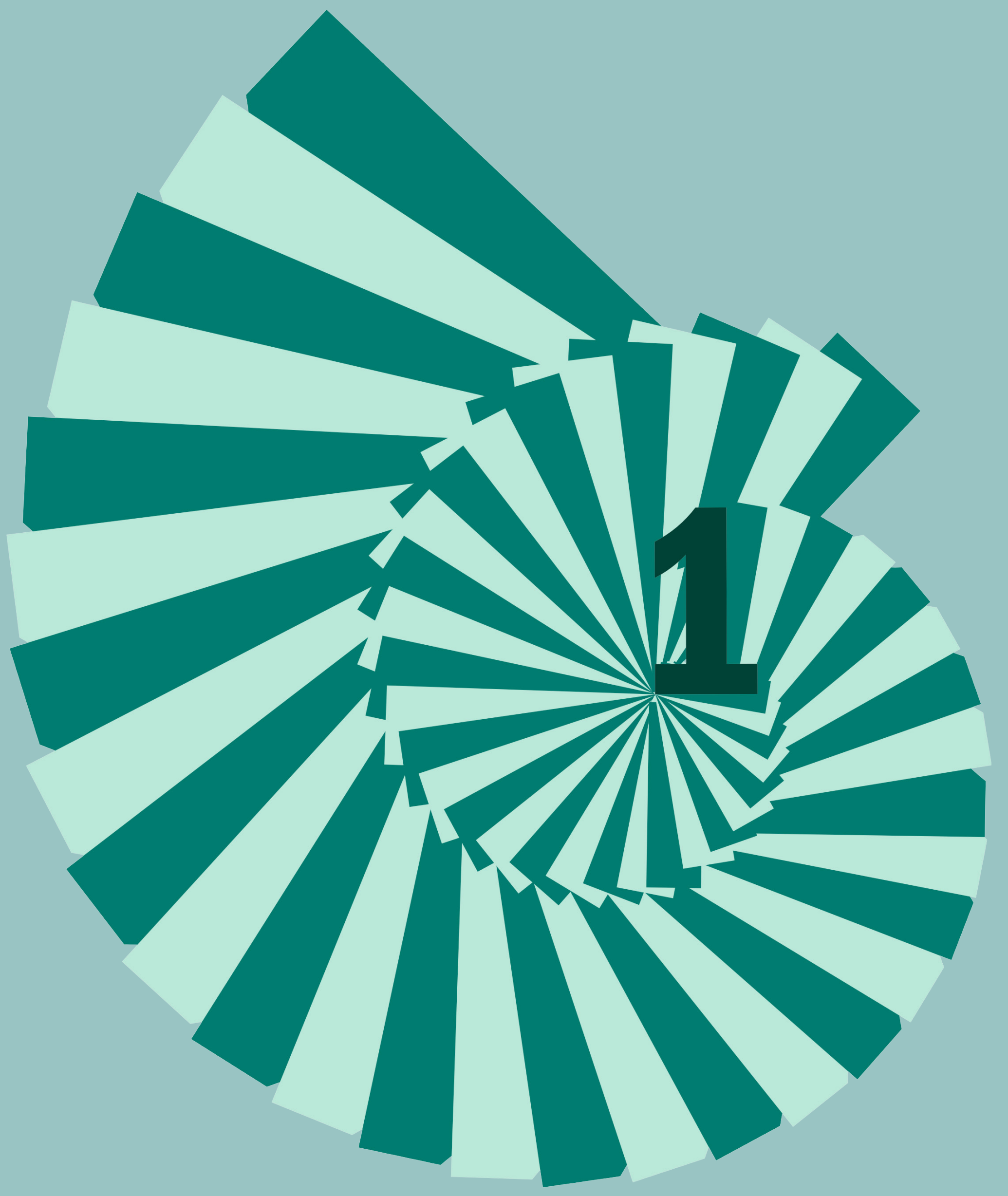
Santiago Alonso Palmas Pérez
Licenciado en Matemáticas por la UNAM. Maestría en Investigaciones Educativas por el DIE-CINVESTAV. Estudiante de Doctorado en Matemática Educativa DME-CINVESTAV. Profesor de Matemáticas en secundaria.

DRA. Alejandra Pellicer
M. EN C. Roberto Víctor Luna Elizarrarás
Coordinadores de la serie. Consejo para la Evaluación de la Educación del Tipo Medio Superior A.C. (COPEEMS)

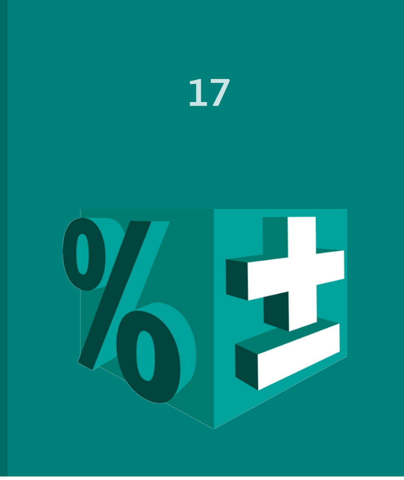
Coordinación editorial
Oficina de Enlace de Comunicación de la SEMS

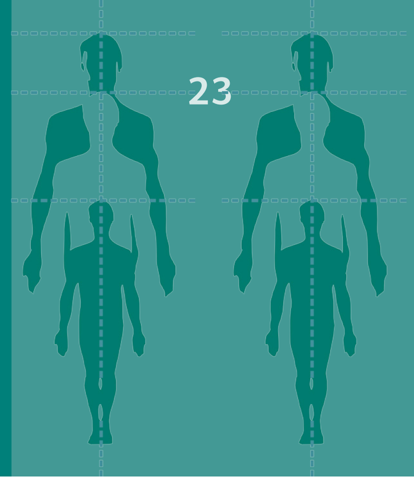
DCG. Luz María Zamitiz Cruz / Juan Ángel Esteban Cruz
Diseño gráfico y editorial

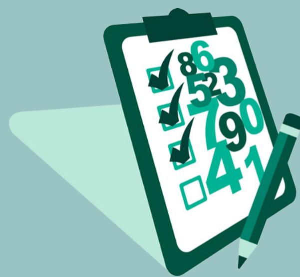
Primera edición, 2016
Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Argentina Núm. 28 Col. Centro Histórico, Del. Cuauhtémoc
Ciudad de México.

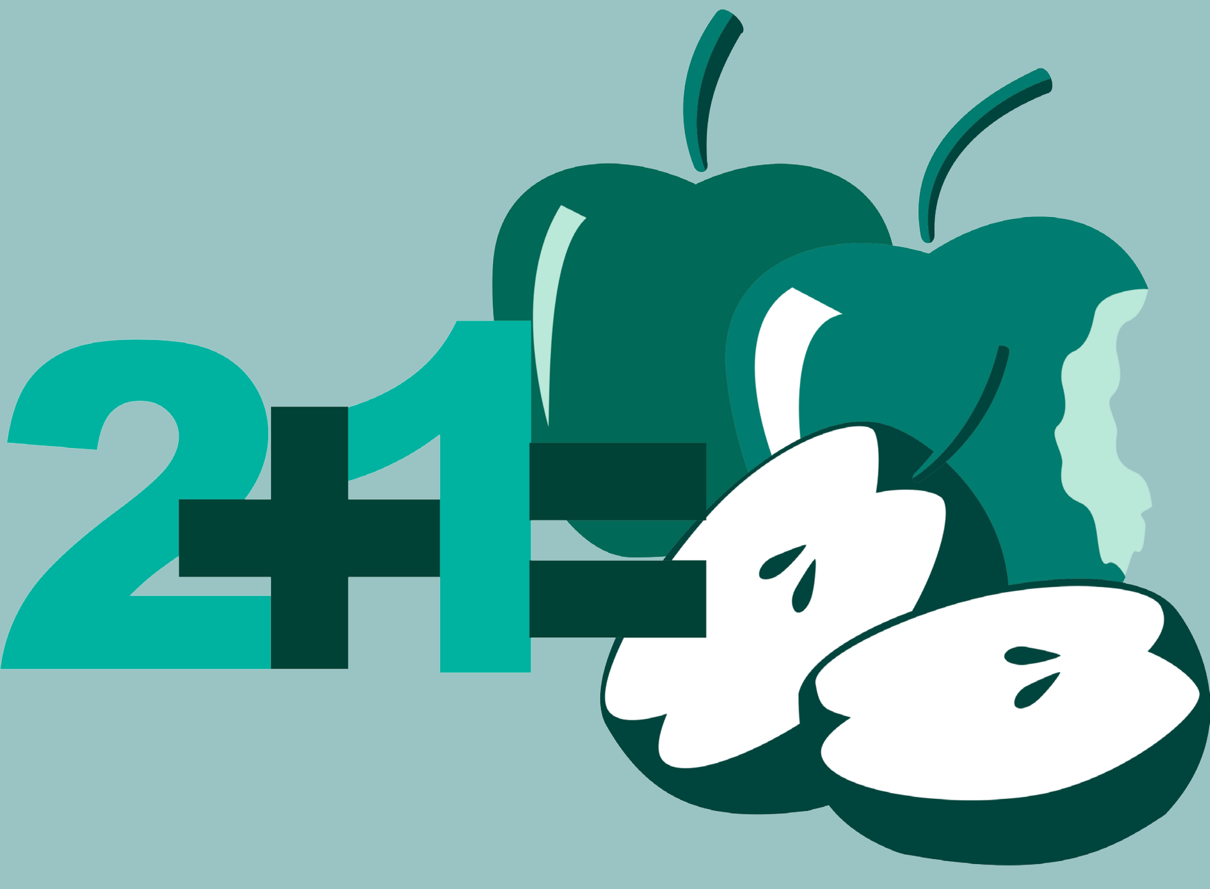

1


9
2+1=

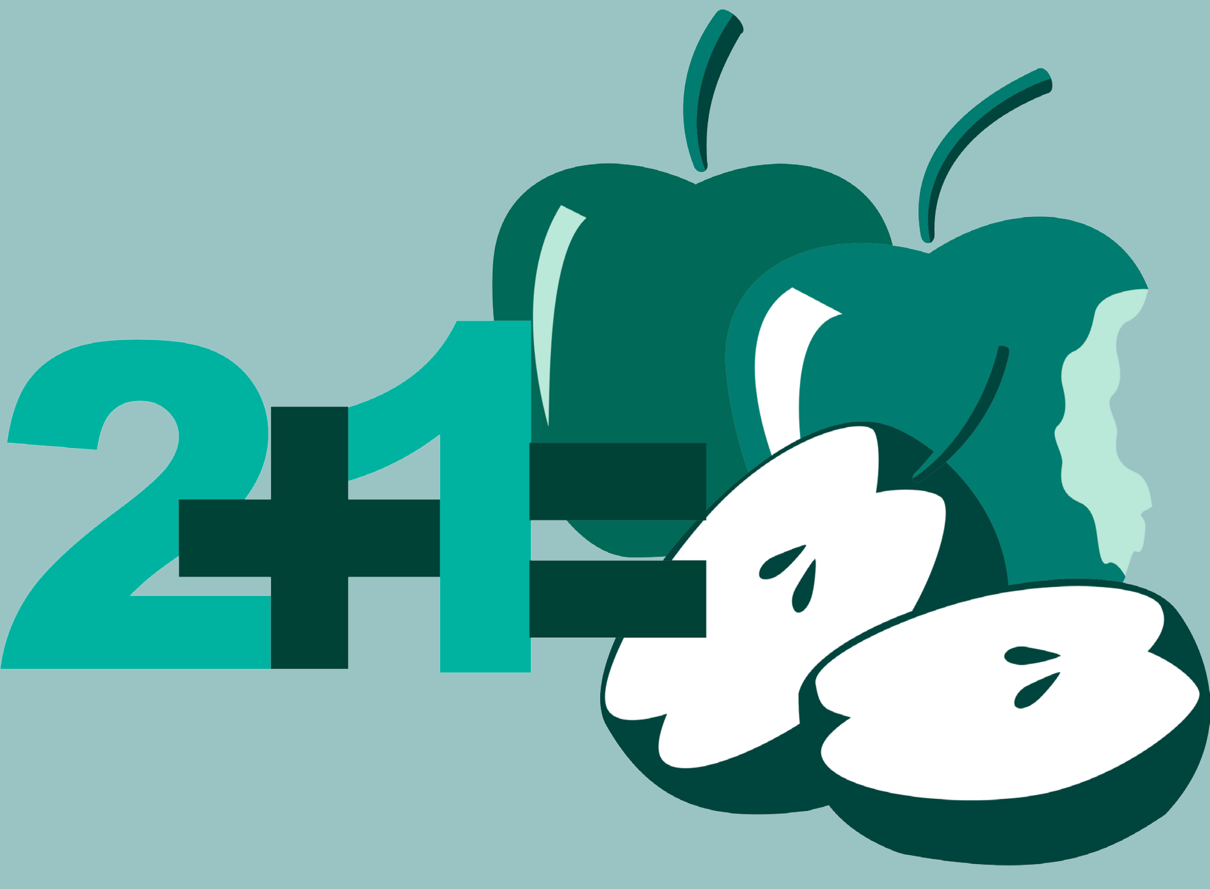

17


23




2+1=

1. Introducción: Dos maneras de ver las matemáticas


2+1=

La enseñanza de las matemáticas ha implicado un debate entre las distintas culturas de las que emanan. En particular, las que provienen de una cultura académica dictan, en la mayoría de los casos, los currículos y formas de evaluar dichos procesos de enseñanza y aprendizaje. Por otro lado, se encuentran las matemáticas que provienen de la experiencia y la vida social, es decir, fuera de la escuela, donde se pueden llegar a experimentar competencias como la *estimación*; se trata de un conocimiento aprendido en contextos reales, el cual es indispensable en la vida de una persona para actuar en el mundo.

Una forma en que se pueden conceptualizar las ideas matemáticas que se hayan fuera del colegio es definiendo la diferencia entre dos maneras de construir un currículo escolar; éstas se refieren, por un lado, a la enseñanza del conocimiento autónomo, y por otro, del proveniente de la práctica social (Ghose, 2007).

En el modelo autónomo, las habilidades matemáticas son vistas como un conjunto de conocimientos abstractos, que se estudian aislados del contexto en donde pueden ser útiles; en el modelo basado en prácticas sociales, se toma en cuenta lo que las personas saben y quieren hacer y aprender. Pero, sobre todo, en el modelo basado en prácticas sociales se hace explícita la importancia del contexto en donde ocurre un fenómeno matemático para integrarlo al análisis de los problemas matemáticos.

Por ejemplo, para elegir de mejor manera en dónde podemos pedir un préstamo, no sólo es necesario ser certero con las matemáticas, también hace falta tener una buena lectura de lo que el contexto nos ofrece: no es lo mismo que nos preste una amiga, un prestamista del barrio o el banco. La idea es que el análisis matemático sea un recurso más para guiar nuestra participación en prácticas sociales.

En el modelo autónomo, los conceptos son fijos y aceptados para enseñarlos en un currículo basado en las matemáticas del ámbito académico; mientras que, en el modelo basado en prácticas sociales, el conocimiento matemático se construye en la medida en que es utilizado, es maleable e incluye métodos de cálculo no convencionales.

Al reconocer que las matemáticas son parte de las prácticas sociales que orientan la forma en que se realizan los eventos cotidianos, los docentes podemos valorar formas de cálculo no convencionales. Por ejemplo, la suma y su algoritmo son diferentes en la práctica y en la escuela. En la escuela se suma con un algoritmo que demanda que primero se opere con las unidades, luego las decenas y después las centenas; en comparación, cuando sumamos mentalmente dinero (por ejemplo, $340 más $255), lo primero que hacemos es sumar las centenas, luego las decenas y luego las unidades (inténtelo). Este procedimiento emerge de un análisis más cuidadoso de cómo hacemos matemáticas diariamente.

Algunas características generales de ambos modelos son:

Modelo autónomo:

- De contenido abstracto y contexto no explícito
- Enfocado en la resolución de problemas ya dados, mediante determinado procedimiento
- Sólo acepta una respuesta
- Trabaja el contenido como si fuera neutral y libre de referentes culturales
- El foco solamente está en el contenido

Modelo basado en prácticas sociales:

- El contenido está embebido en prácticas y eventos
- Acepta más de una respuesta, dependiendo de la situación
- Incorpora cuestiones culturales, roles de poder y valores
- Se enfoca tanto en el contenido como en los procesos

Tabla 1. Diferencias entre el modelo autónomo y el modelo basado en prácticas sociales (Ghose, 2007; 110)

Lo que se pretende mostrar con esta diferencia es que las matemáticas que se pueden trabajar en la escuela no son solamente aquellas que provienen del mundo Matemático (con M mayúscula, como lo propondría Bishop) sino también aquellas que provienen de la práctica y de la experiencia de vida. Como dijimos anteriormente, la estimación de valores, distancias y cálculos es algo que se puede encontrar fuera de las aulas del colegio y que además es sumamente útil en la práctica común, por lo que incluirla dentro de las escuelas tendría una doble ventaja: ensanchar la reflexión y promover la crítica dentro del salón de clases, así como contextualizar las matemáticas y atender a la pregunta: ¿de qué nos sirve estudiar matemáticas?

El trabajo del docente requiere de una sensibilidad mediadora entre las matemáticas autónomas y las basadas en prácticas sociales, la cual, a su vez, exige que el profesor profundice en su propia práctica, para reinventarla día a día. La escuela francesa de didáctica de las matemáticas propone que el trabajo del docente se guíe por la creación de una "micro sociedad científica" (Brousseau, 1986), haciendo del lenguaje matemático una herramienta para la solución de debates. Los participantes de esta pequeña comunidad científica desarrollan la capacidad de observar fenómenos sociales y culturales desde una perspectiva matemática, sumándose a otras áreas orientadas a estudiar los mismos fenómenos, pero desde otros enfoques, como la economía y la etnología.

Otra de las labores del docente está en investigar y entender la historia de cada alumno en cuanto a su relación con las matemáticas, historia que refleja frustraciones, obstáculos, fortalezas y, en general, nociones matemáticas previas que los estudiantes acarrean consigo hasta su educación media superior.

Una manera de acercarse a la historia de las matemáticas en la vida de los estudiantes es haciendo preguntas del siguiente estilo:

- ¿En dónde y con qué propósito has utilizado las matemáticas fuera de la escuela?

- ¿En qué situaciones te ha faltado saber algo de matemáticas?
- ¿A qué obstáculos te has enfrentado por no poder aplicar las matemáticas?

Esta misma exploración individual puede ser extendida a todo el grupo para que los alumnos dialoguen sobre si han experimentado los mismos obstáculos o si identifican las mismas situaciones fuera de la escuela. La idea general es explorar las prácticas culturales en las que participa el estudiante y las actividades matemáticas que surgen de éstas, preguntarle al alumno en qué aspectos de su vida encuentra situaciones matemáticas, de preferencia enfocándose no solamente en las prácticas que involucren números, sino también en problemas que impliquen la medición y las relaciones espaciales, entre otros temas.

Uno de los posibles temas que abre la oportunidad de enseñar las matemáticas y permite unir los dos tipos de modelos de currículo –el autónomo y el basado en prácticas sociales- es la *proporcionalidad*, el cual recorre gran parte de la educación básica hasta concluir o aterrizar en varias materias del currículo de la educación media superior. Dicha trayectoria atraviesa por los siguientes temas que tienen la proporcionalidad como núcleo:

- Fracción y número racional
- Razón y proporción
- Número decimal
- Problemas de la medida
- Cambio de unidades
- Problemas de repartos proporcionales
- Regla de tres
- Porcentajes
- Probabilidad

- Gráficas de funciones lineales
- Teorema de Thales
- Semejanza de figuras
- Escalas
- Funciones trigonométricas
- El número π

De igual forma, la idea de proporcionalidad se encuentra en muchos conceptos de física y química, tales como: velocidad, aceleración, densidad, presión, concentración, ley de Ohm o ley de Hooke, así como en conceptos de las ciencias sociales como pueden ser: densidad de población, tasa de natalidad, entre otros, donde se relacionen dos cantidades linealmente.

En general, cuando estimamos distancias, aplicamos de cierta manera la proporcionalidad, o por lo menos una idea de ella. Esta aplicación en la práctica social es la que, desde el punto de vista de la epistemología genética, se considera como uno de los esquemas fundamentales del estadio de las operaciones formales (Inhelder & Piaget, 1955), por ejemplo, cuando estimamos la altura de un edificio haciendo una escala en la que si un piso mide 2 m entonces el edificio mediría x m, según la cantidad de pisos, o cuando, para pintar una pared, estimamos que por cada 5 m^2 usaremos un galón de pintura. Es, por lo tanto, un concepto utilizado cotidianamente y, en este caso, el analizarlo desde las matemáticas autónomas nos da pistas para seleccionar y utilizar métodos de enseñanza que ayuden a los estudiantes a reordenar sus ideas y resolver problemas.

Ver las matemáticas como una unión entre el modelo autónomo y el basado en las prácticas sociales expande la visión acerca de su enseñanza, centrándola no solamente en la transmisión y aprendizaje de sus conceptos, sino también en que el alumno advierta, desde sus propias prácticas culturales y sociales, cómo sus actividades cotidianas involucran a las matemáticas. En la situación didáctica que se presenta a continuación se hacen explícitos los momentos en los que es posible trabajar de manera paralela con un modelo autónomo y uno basado en prácticas sociales.

2. Análisis epistemológico de porcentaje, descuentos e intereses

El tema que se trabajará en esta estrategia didáctica es el proyectado en el primer bloque del actual mapa curricular de la SEMS-DGB: “Resuelve problemas aritméticos y algebraicos” y su competencia a desarrollar de “Formular y resolver problemas de porcentajes, descuentos e interés, etcétera” del programa de estudios Matemáticas I.

El porcentaje, los descuentos y el interés simple forman parte del concepto de proporcionalidad, el cual se trabaja desde cuarto grado de primaria, aunque es en la secundaria cuando éste se articula con una noción base de las matemáticas de la educación media superior, la *función lineal*. El estudio de la proporcionalidad tiene un gran potencial de uso, ya que sus aplicaciones en diversos contextos son de uso casi obligatorio en la vida cotidiana; por ejemplo, en el cálculo de los descuentos, los intereses, el IVA, la velocidad constante, las escalas, el crecimiento de poblaciones, etcétera.

La proporcionalidad es la relación entre dos variables que cambian en relación a una constante. Por ejemplo, en un grupo de personas uno se puede referir a la razón de mujeres y hombres. Supongamos que hay 45 personas, de las cuales 15 son mujeres, entonces la proporción de mujeres en el grupo es el resultado de dividir 15/45=1/3. Así, la expresión que denota la proporción de mujeres en el grupo es de 15/45, es decir, hay 15 mujeres en un grupo de 45 personas. Esta fracción muestra una relación entre la cantidad de mujeres y el total de personas en el grupo; si, por ejemplo, hubiera otro grupo con la misma proporción de mujeres y, en total, el grupo tuviera 60 personas, entonces, podríamos saber que en este nuevo grupo habría 20 mujeres.

En general se denota esta relación como:

$$y = kx$$

donde (x, y) son las variables y k es la constante de la proporcionalidad $(k = y/x)$. Por la ecuación anterior, se puede notar que si x cambia de valor, lo hará también y, es decir, las dos variables son proporcionales. En general, si tenemos dos series de cantidades $\{a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ y $\{b_1, b_2, b_3,\ldots\}$, la constante de proporcionalidad entre ellas es igual a la razón entre sus cantidades $k=a_n/b_n$.

El *porcentaje* es una forma particular de representar la proporcionalidad, en la que una cantidad es considerada como parte proporcional de un *todo* y es expresada como fracción de 100. Por ejemplo, si el *todo* es el total de libros en la biblioteca, cuando se dice que el 75% de estos libros está en mal estado significa que 75 de cada 100 libros está en mal estado. Esta proporción también puede ser expresada como 75/100 o 0.75.

La palabra porcentaje está formada con raíces latinas que significan "conjunto de una centésima parte"; se refiere a una razón de proporcionalidad expresada como fracción de 100 partes (x/100) y denotada por el signo %. Por ejemplo, el 25% es lo mismo que 25 partes de 100, 25/100 o 0.25.

Breviario histórico: Impuestos en la antigua Roma.

En la época del primer emperador romano Augusto, posterior a una guerra civil, se impuso un impuesto denominado *centesima rerum vanalium*, que gravaba con el 1% todas las ventas de edificios, terrenos, animales y otras cosas. En el 6 a. n. e., el mismo Augusto estableció el *vicesima hereditatum*, impuesto que consistía en pagar la vigésima parte de la transmisión de la herencia para costear la pensión de los veteranos de guerra (Aparicio, 2009).

En las situaciones comerciales sobre préstamos monetarios o inversiones es usual calcular cuánto nos cobrarán o pagarán por solicitar o invertir cierta cantidad de dinero. Por ejemplo, si pedimos un préstamo de $5000 a una tasa del 13% anual, al cabo de un año deberemos pagar la cantidad que solicitamos más el 13% de la misma, es decir, $5 800.

Es habitual calcular el interés a periodos específicos, ya sean anuales, mensuales o diarios. Algunos conceptos básicos de este tipo de interés (simple) son el capital ($\boldsymbol{C}$) solicitado (o invertido), el interés ($\boldsymbol{I}$), el monto total ($\boldsymbol{M}$) y la tasa de interés ($\boldsymbol{i}$).

El monto total incluye el capital más el interés, es decir:

$$M=C+I$$

Ahora bien, para calcular el interés, es necesario conocer la tasa de interés, el tiempo transcurrido ($\boldsymbol{n}$) y el capital solicitado (o invertido):

$$I=niC$$

Es importante recalcar que, en la fórmula, el interés tiene que ser expresado como la centésima parte de su expresión como porcentaje; es decir, si es 13%, en la fórmula pondríamos 0.13.

Para lograr que este conocimiento autónomo sea algo útil, es necesario que los alumnos identifiquen en qué práctica social y cultural podrían aplicar el conocimiento matemático de interés. Un objetivo posterior a la investigación puede ser encontrar los límites de esta fórmula, por ejemplo, en los ejercicios escolares, se asume que este tipo de interés es lineal y siempre da el mismo rédito del mismo capital invertido desde un comienzo. Sin embargo, en la mayoría de los planes reales, el capital se reinvierte cada año y se calcula el rédito sobre el nuevo capital acumulado.

Las matemáticas autónomas se muestran siempre incompletas cuando las comparamos con las matemáticas derivadas de prácticas sociales, en otras palabras, parecería que con las herramientas conceptuales no podemos resolver todos los problemas matemáticos que se presentan en la vida cotidiana. Los fenómenos matemáticos culturales y sociales son más complejos que la modelización que se hace con los modelos autónomos, sin embargo, estos conceptos son muy útiles porque ofrecen un panorama amplio de dichos fenómenos.

Esta fórmula también puede funcionar para calcular el descuento que nos hacen en una tienda, pero tenemos que modificar la fórmula del monto total restando el interés (o descuento ***D***), es decir:

$$M=C-D$$

En este caso, el descuento se calcula multiplicando el centésimo del descuento, expresado como porcentaje, por el precio. Es la misma fórmula que la del interés eliminando ***n***, el tiempo:

$$D=iC$$

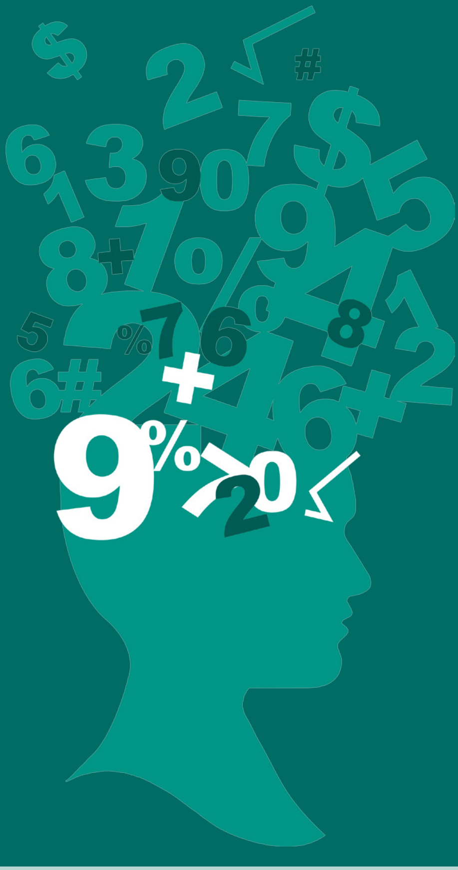
Por ejemplo, cuando queremos encontrar el 25% de descuento en el costo de una mercancía cuyo valor es de $7500:

$$D=0.25(7500)$$
$$D=1875$$

Por lo tanto el monto total es:

$$M=7500-1875=5625$$

Se propone que antes de comenzar las secuencias didácticas los alumnos hagan una investigación acerca de estos temas en la vida cotidiana. Por ejemplo, que en una semana registren todos los eventos en donde se involucren porcentajes, descuentos o intereses para después analizarlos en conjunto a la hora de clase y así reconocer si es posible resolverlos con el conocimiento autónomo descrito anteriormente. Si no, analizar por qué no alcanza este conocimiento y qué conceptos necesitamos. Por otro lado, podemos analizar dichos eventos: ¿Qué tienen en común? ¿Cómo reconocieron que involucran los conceptos de porcentaje, descuentos o intereses? ¿Pudieron resolverlo por cuenta propia? Hacer esta discusión de manera grupal abriría un buen espacio para reflexionar sobre las diferentes visiones que los estudiantes tienen de las matemáticas.



3. Sobre la secuencia didáctica

La estrategia didáctica que a continuación se presenta está dividida en tres secciones: la primera, trata sobre porcentajes vistos desde los dos modelos de matemáticas; la segunda, una secuencia sobre engaños en negocios piramidales vista como combinación entre modelos; y la tercera, plantea el problema de decidir cuál es la mejor opción para solicitar un préstamo o hacer una compra a plazos, según las condiciones ofrecidas por las empresas comerciales y bancarias. Cada una tiene distintos objetivos:

a) Actividades sobre el porcentaje [1]
   En esta primera secuencia se trabaja el porcentaje desde ambos modelos: el autónomo y el basado en prácticas sociales. El objetivo es reconocer ambos modelos en las matemáticas y trabajar con ellos. Así, esta situación didáctica tiene dos partes. La primera introduce el tema del porcentaje desde lo más sencillo; a partir de una problemática social presentada en una nota informativa; posteriormente, propone actividades de conceptualización para reconocer que el porcentaje es una relación entre dos cantidades. La segunda parte trabaja el porcentaje en la vida práctica, para ello propone que los alumnos recuperen situaciones de la vida cotidiana que involucran porcentajes para analizarlas en clase; posteriormente, plantea el análisis de engaños comerciales basados en la manipulación de porcentajes.

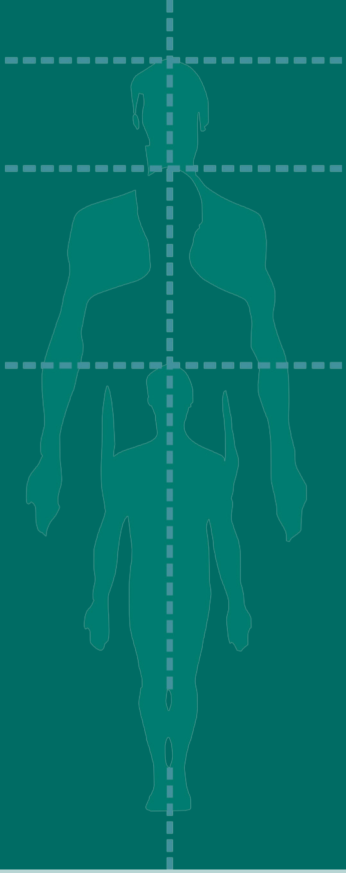
b) Los engaños piramidales
   Esta actividad subraya el trabajo con la línea de las prácticas sociales y está pensada para que el alumno reconozca en las matemáticas una herramienta de análisis de fenómenos sociales. En este caso, se analiza brevemente un ejemplo de negocio ilegal

[1] Esta actividad se inspira en una actividad bien conocida en la Investigación Educativa Matemática retomada en el libro de Sexto Grado 2000, disponible en http://www.die.cinvestav.mx/Portals/die/SiteDocs/Investigadores/DBlock/EstudiosDidNRFD/2-3-2008elPapeldela.pdf. La primer parte de esta actividad ha demostrado ser ideal para la introducción del tema de porcentaje a cualquier nivel educativo

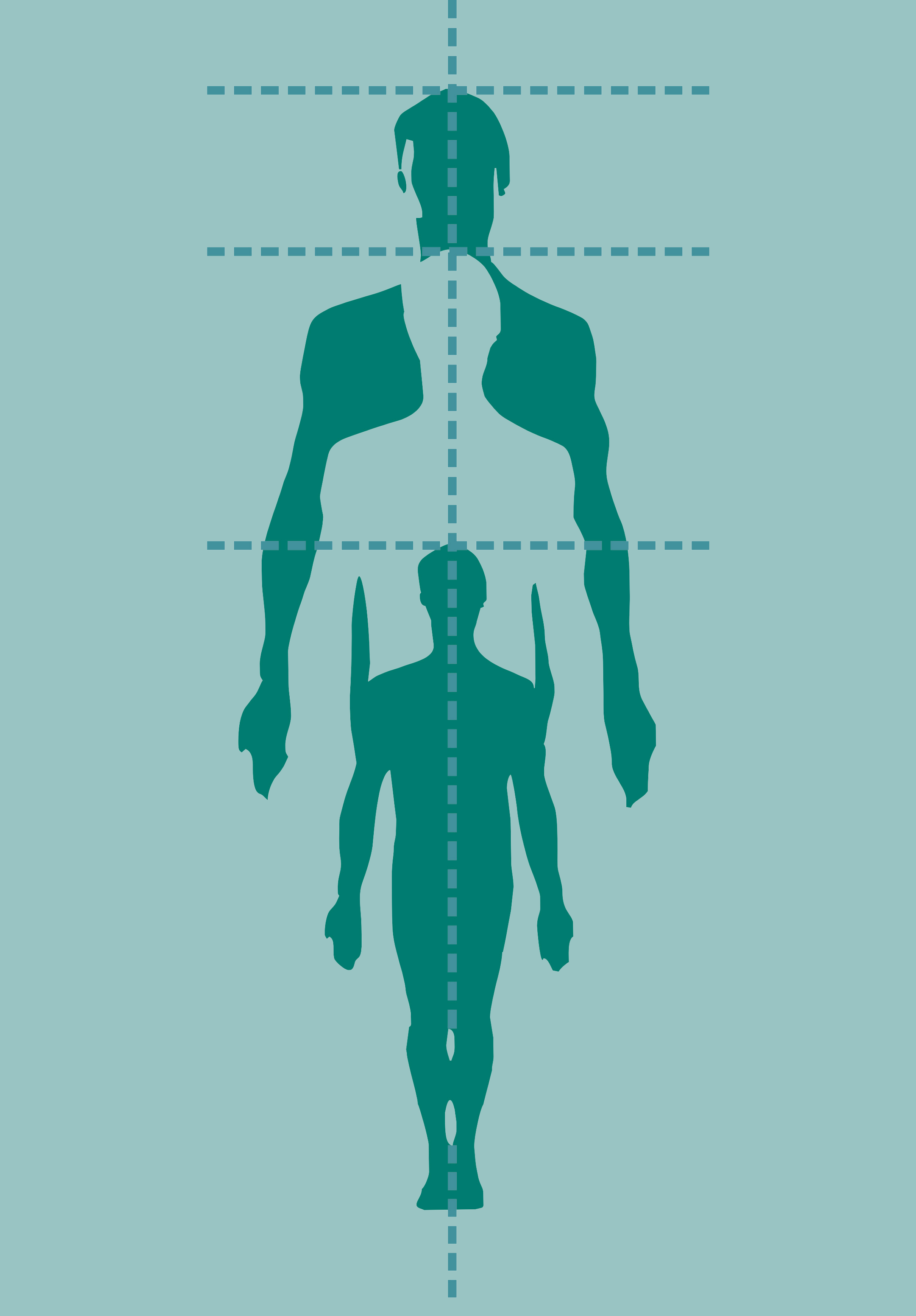
que aumenta el capital de un reclutador haciendo el porcentaje de ganancia para los sucesores cada vez menos significativo.

c) Actividad sobre préstamos
   Por último, esta actividad trabaja sobre los préstamos y las compras a plazos. Pretende ser un punto medio entre las matemáticas autónomas y las que están enmarcadas en prácticas sociales. Esta actividad analiza un caso ficticio de una compra a plazos en donde el estudiante decidiría, con base en un análisis matemático y su modelización, qué le conviene hacer.

En general, la secuencia didáctica es una ida y vuelta entre modelos matemáticos con el objetivo de enriquecer la mirada sobre las matemáticas y sus alcances.



4. Secuencia didáctica



4.1 Actividad sobre porcentajes

El porcentaje es un tema que puede ser trabajado desde los dos modelos matemáticos vistos anteriormente. Desde el autónomo, los porcentajes son parte de un tema más grande: la proporcionalidad. Desde las prácticas sociales, hay una variedad de problemas con los que se puede trabajar en clase, basta con citar algunas actividades cotidianas que involucran descuentos o intereses. Al final de esta situación didáctica se trabaja el porcentaje como práctica social en los descuentos y en la lectura de una noticia que involucra el tema.

Para introducir el trabajo con los porcentajes, se comienza por la versión más autónoma. Esta elección tiene la intención de comenzar por algo más tradicional para ir aproximando a los alumnos a la comprensión del modelo basado en prácticas sociales de manera amena y con una curva de aprendizaje cada vez menor, lo cual sentará las bases para que poco a poco el alumno, junto con el docente, vaya entrando en el modelo de prácticas sociales.

Primera parte: Introducción al porcentaje

Las consignas que se presentan a continuación se trabajan con los alumnos para explorar algunas concepciones matemáticas previas sobre la proporcionalidad y los porcentajes. Se presenta un problema con un trasfondo social, pero los conocimientos matemáticos involucrados son cercanos a los contenidos tradicionales. En este sentido, las actividades funcionarán como puente entre los dos modelos de matemáticas descritos anteriormente.

Consigna 1

- Lea con sus alumnos el siguiente comunicado de la ONU sobre la situación de los migrantes en 2014:

> *18 de diciembre, 2014 — Demasiados migrantes siguen viviendo y trabajando en condiciones precarias e injustas,*

dijo hoy el Secretario General de Naciones Unidas, con motivo del Día Internacional del Migrante, que se celebra hoy.

En un comunicado de prensa, Ban Ki-moon hizo un llamamiento para que los derechos humanos de los 232 millones de migrantes del mundo sean respetados y protegidos. ***Dos de cada diez*** *migrantes se encuentra en situación irregular.*

Las políticas migratorias deben estar basadas en la evidencia, en lugar de la xenofobia y las percepciones erróneas", dijo el titular de la ONU, instando a los Estados Miembros a reafirmar su compromiso con la formación de sociedades diversas y abiertas.

Texto consultado en:

http://www.un.org/spanish/News/story.asp?newsID=31265#.VwKFhsdzORs

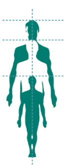
- Pida a los alumnos que calculen el número de migrantes originarios de distintos países que se encuentran en una situación inestable, conociendo el número de emigrantes por país en 2014.

México	Cuba	El Salvador	Estados Unidos	India
13 209 000	1 471 000	1 525 000	2 970 000	14 157 000

Datos tomados de: http://www.migrationpolicy.org/programs/data-hub/international-migration-statistics

- A continuación, examinen grupalmente cuáles fueron las formas de calcular el número de emigrantes de cada país que se encuentran en una situación inestable. Plantee preguntas que propicien la reflexión como la siguiente: ¿qué relación tiene obtener dos de cada diez con el 20% de la población migrante inestable?

- Invítelos a investigar cuáles son los problemas que enfrentan los migrantes en situación inestable. Pídales que compartan la información encontrada y que comenten: ¿por qué son relevantes los datos publicados por la ONU?



La siguiente consigna trabaja el porcentaje como parte de la proporcionalidad. Su objetivo es laborar con tres maneras distintas de expresar la proporcionalidad como relación entre conjuntos de cantidades: a) como porcentaje; b) como proporción expresada con una fracción, y c) como relación entre dos cantidades. Asimismo, el propósito de esta consigna es trabajar la equivalencia como herramienta para reconocer relaciones entre cantidades.

Consigna 2

Explique a los alumnos que los siguientes ejercicios están diseñados para explorar las distintas maneras de entender la relación de proporción entre las cantidades acordadas en un intercambio económico o laboral. Es importante ofrecer un contexto específico, por lo que en este caso se trata de un agricultor que cosecha naranjas y a quien le ofrecen diferentes tratos con diferentes valores. El objetivo de esta sección es construir con el alumno la noción de que el porcentaje es la representación de la relación entre el total y una parte del mismo.

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a: "Por cada 8 naranjas les doy 2"?

- *Les doy 30% de las naranjas que recojan.*
- *Les doy ¼ de las naranjas que recojan.*
- *Por cada 20 naranjas que recojan les doy 5.*

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a: "Les doy el 40% de las naranjas que recojan"?

- *Les doy 1/3 de las naranjas que recojan.*
- *Por cada 30 naranjas les doy 12.*
- *Les doy 2/5 de las naranjas que recojan.*

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a: "Les doy 1/5 de las naranjas que recojan"?

- *Por cada 30 naranjas les doy 5.*
- *Les doy 2/10 de lo que obtengan.*
- *Les doy el 5% de lo que obtengan.*

La idea es que los alumnos exploren matemáticamente cómo calcular las equivalencias entre las relaciones de proporción involucradas en estos tratos. En esta sección el docente puede fomentar el uso de diferentes formas de validación de los resultados, por ejemplo, comparando con otros compañeros o usando una explicación que a todos convenza. La validación puede ser utilizada como herramienta al hacer de esta parte una etapa de la situación didáctica; por ejemplo, para el caso anterior, pedir a los alumnos que validen sus resultados ofreciendo argumentos que convenzan al grupo. Esta dinámica convierte a la validación en una forma particular de integrar los razonamientos de los estudiantes al proceso educativo.

En la siguiente sección se comienza a analizar el caso particular del porcentaje como razón de 100, se continúa su exploración y análisis.

Segunda parte: El porcentaje como práctica social

En esta secuencia didáctica se alterna el trabajo con los dos modelos de enseñanza de las matemáticas. En esta sección se trabaja el porcentaje desde sus prácticas cotidianas.

Durante esta segunda etapa es necesario explorar junto con los alumnos situaciones en las que puedan explicar dónde han encontrado o utilizado los porcentajes. Pedirles que las registren, tomen fotos o escriban en un papel sus experiencias y traigan al aula sus registros. Es importante que algunos de ellos expliquen de qué trata su problema y cómo lo resolvieron; en particular, interesa que identifiquen el contexto de donde parte el problema.

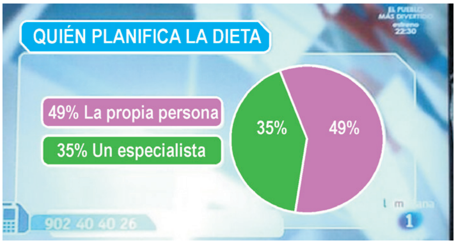
Con esta actividad se pretende lograr dos cosas. Por un lado, que los alumnos se percaten de que las matemáticas no sólo están en los libros de texto o en el salón de clase, sino que están presentes en muchas actividades de la vida diaria. Y, por el otro, que reflexionen sobre los límites de sus conocimientos y de las maneras en que les han enseñado el porcentaje. En la vida cotidiana, el cálculo de los porcentajes aparece en problemas un poco más complicados que los problemas tradicionales que se plantean en la escuela, además, ayudan a entender mejor los fenómenos sociales. Por ejemplo, es común que en México y en otros países haya un fin de semana en el que todos los comercios hacen descuentos que parecen importantes, como la siguiente tienda que hizo un descuento del 50% en la venta de una cama:

Sin embargo, 8 meses después, se leía en la tienda el siguiente descuento:

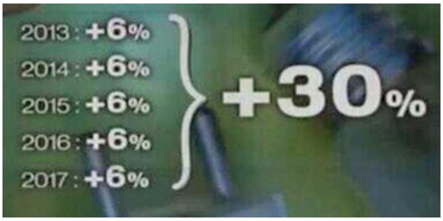
¿Qué fue lo que sucedió?, ¿por qué se obtuvo el mismo precio?, ¿qué es lo que hizo la empresa para obtener el mismo costo en dos fechas distintas? Este tipo de imágenes se puede mostrar a los alumnos con el fin de convencerlos de que saber matemáticas nos sirve para tener una lectura distinta del mundo en el que vivimos.

Consigna 1
Pida a sus alumnos que analicen qué problemas aparecen en las siguientes imágenes y determinen con sus compañeros qué es lo que está mal en ellas:

- Indíqueles que observen la distribución de porcentajes del diagrama de círculo y argumenten con sus compañeros por qué el total debe ser el 100%.



- Presente a los alumnos el siguiente gráfico, tomado de una noticia televisiva sobre el aumento anual del 6% en el costo de la electricidad en España. Pregúnteles por el error o los errores que encuentran.



Analice con los estudiantes el problema o los problemas identificados y plantéeles el siguiente contexto.

- Pídales que supongan que en 2013 la electricidad costaba €100 y que calculen el 6% de este valor; esto les permitirá conocer el costo anual de la electricidad en 2014, que es el 106% del original. Después, solicite que calculen el 6% de esta cantidad y que lo sumen para conocer el costo de 2015, que representa el 112.36% del costo en 2013. Continúen de esta manera hasta llegar al incremento del costo en 2017:

100 + 6% = 106 + 6% = 112.36 + 6% = 119.10 + 6% = 126.25 +6% = 133.82

Por lo tanto, el costo de la electricidad no subió 30% en total, sino 33.82%.

Consigna 2
Pregunte a los alumnos si ellos han encontrado cosas así en la vida cotidiana. Si es así, pídales que las compartan con el resto del grupo para analizarlas.

Consigna 3
Pida a los alumnos que diseñen un anuncio publicitario en que manipulen los porcentajes de los descuentos para crear la ilusión de que una persona paga menos por un producto cuando en realidad está pagando más.

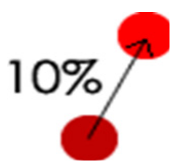
4.2 Los engaños piramidales

Esta actividad tiene como propósito despertar en los alumnos el pensamiento reflexivo y la investigación. Se les invita a pensar sobre todos aquellos problemas y trampas que se relacionan con los engaños piramidales. Además, la intención es que los estudiantes analicen, mediante la comprensión de los temas que estamos abordando, la forma en que las matemáticas pueden ser útiles en la vida cotidiana. Esta actividad de reflexión necesita que los alumnos investiguen sobre el tema y lleven esos conocimientos al aula.

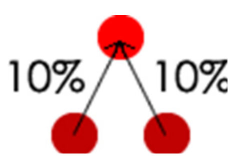
El contexto que se ofrece a los alumnos muestra cómo algunas empresas diseñan esquemas de negocios de venta de productos en las que sus miembros tienen que conseguir involucrar a otros para que ingresen a la empresa, haciéndoles creer que trabajando como ellos pueden subir de nivel y ganar más dinero. En este esquema de negocio los participantes tendrían que captar a más clientes con el objetivo de producir beneficios para los miembros originales. El análisis de este problema puede ser introducido a los alumnos de la siguiente manera:

Consigna 1

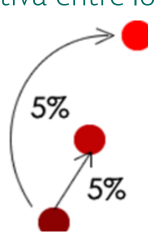
En un esquema de negocios de venta de jugos, el jugo cuesta $150. Cada participante que decida entrar al negocio puede ganar el 10% de la venta que realicen sus amigos; por ejemplo, una persona reclutada tiene que dar 10% de sus ganancias al participante que lo reclutó.



Si tiene dos amigos, entonces por cada producto que cada amigo venda le darían el 10%:

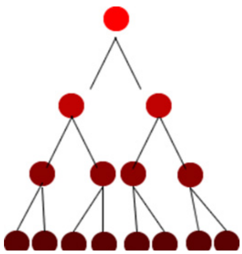


Si los amigos reclutados consiguen a más personas, de cada venta que haga cada una le darán el 10% al reclutador pero repartidas las ganancias de manera equitativa entre los niveles más altos:



En el cuarto nivel, el vendedor reparte 10% a partes iguales a los niveles anteriores, es decir, 3.3% para cada participante de niveles superiores.

- Después de hacer un análisis de lo que significa la repartición de porcentajes en un sistema piramidal, pida a los alumnos que calculen la ganancia de cada persona, si todos los vendedores han reclutado a dos amigos y todos los que están debajo del primer reclutador venden un producto de $150. Sugiérales que se apoyen en el siguiente esquema:



- Propicie que los alumnos validen los resultados a los que han llegado. Para profundizar en el análisis de la situación y valorar sus implicaciones, plantéeles las siguientes preguntas:
    - ¿Cuántas personas serían necesarias para completar 10 niveles de vendedores en la pirámide?
    - ¿Cuánto estarían ganando los primeros en la pirámide?
    - ¿Y los últimos?
    - ¿Consideran justa la distribución de ganancias en los distintos niveles de la pirámide? ¿Por qué?

La idea consiste en trabajar junto con los alumnos para que se den cuenta que la persona arriba de la pirámide puede ir ganando gran cantidad de dinero sin hacer nada. En este tipo de negocios no importa el producto a vender, sino las relaciones públicas y la capacidad de incluir a más gente en la pirámide. Sin embargo, la cantidad de gente que es posible reclutar se va reduciendo con cada nuevo nivel.

- Para comprobar lo anterior, pida a los alumnos que comparen la cantidad de personas necesarias para completar el nivel 10 de la actividad anterior con la población de su colonia, barrio o ciudad, calculando el porcentaje que esto representaría.

Este tipo de esquemas de negocio son comunes en nuestro país y pueden ser analizados matemáticamente. Es muy importante compartir con los alumnos este tipo de reflexiones para ayudarlos a comprender cómo la reflexión matemática sobre porcentajes y su uso está presente en la vida cotidiana.

El asunto de las estafas piramidales es amplio e ineludible de ser analizado en clase cuando se está tratando el tema de porcentajes, ya que tiene que ver con temas como progresiones geométricas y aritméticas, pero, sobre todo, con asuntos cercanos a disciplinas como la economía y la sociología. Si se quiere profundizar sobre este tema recomendamos al docente que busque información con los alumnos sobre los siguientes ejemplos de esquemas de negocios en los que estafan a los participantes:

- Células de la abundancia
- Esquema de pirámide
- Carlo Ponzi y Bernard Madoff

4.3 Actividad sobre intereses

La siguiente secuencia está diseñada para trabajar un tema social común, los préstamos monetarios, conjugando las perspectivas de las matemáticas autónomas y las matemáticas vistas como prácticas sociales. Se plantea aquí un escenario concreto al alumno, con el fin de que llegue a estar consciente de sus conocimientos matemáticos, para usarlos y reflexionar sobre lo que podría ocurrirle en la vida cotidiana o a lo que podría llegar a decidir con base en ellos. Veamos.

Consigna 1

- Plantee a los alumnos el siguiente escenario para que lo analicen y decidan qué harían si estuvieran en la misma situación:

Una persona tiene ahorrados $20000 y quiere comprar un refrigerador de ese costo. Sin embargo, no quiere descapitalizarse y dejar en ceros su cuenta, por lo que analiza la solicitud de un préstamo o la compra a plazos del refrigerador pagando intereses. Para esto, considera que tiene una capacidad de ahorro mensual de $1000.

Con el fin de calcular sus posibilidades, consulta en línea los pagos que tendría que hacer a una conocida tienda de electrodomésticos para comprar el refrigerador en un plazo de 6 meses. La página electrónica le despliega los siguientes datos:

- Analice con sus alumnos si esta opción le conviene al personaje para comprar el refrigerador sin descapitalizarse. Guíelos para que consideren las siguientes preguntas, planteadas como si el personaje se las hiciera a sí mismo:
  - ¿Qué me conviene hacer? ¿Pido prestado en las condiciones que se muestran en la imagen o pago de contado?
  - ¿Si pido prestado y pago mensualmente con estos intereses, tendré dinero al final de los 6 meses?
  - ¿Cuál es el monto total que pagaré en los 6 meses?
  - ¿Qué porcentaje representa el valor total que pagaré en comparación con el costo original del refrigerador?
  - ¿Cuál sería el porcentaje que representa la tasa de interés?

Con el fin de ampliar sus opciones, la persona consulta las condiciones de compra si el plazo a pagar es más largo, anticipando que podría pagar mensualidades más reducidas. La página de internet le ofrece los siguientes datos:

- Analice con los alumnos la conveniencia para el personaje de estas condiciones de pago. Para orientarlos, pídales que consideren las siguientes preguntas:
  - ¿Me conviene pedir prestado con las nuevas condiciones de pagar en 16 meses o pagar de contado?
  - ¿Si pido prestado y pago mensualmente con estos intereses, cuánto dinero tendré en mi cuenta bancaria al final de los 16 meses? ¿Podré pagarlo?
  - ¿Cuál es el monto total que pagaré en los 16 meses?
  - ¿Qué porcentaje representa el valor total que pagaré en comparación con el costo original del refrigerador?
  - ¿Cuál sería el porcentaje que representa la tasa de interés?, ¿qué diferencia hay entre el porcentaje que tengo que pagar si acepto el préstamo de 6 meses y el de 16 meses?

- Propicie que los alumnos lleguen a una conclusión sobre cuál es la mejor opción para el personaje, considerando el costo final del producto, el deseo de no descapitalizar su cuenta bancaria y la posibilidad de generar un ahorro mensual de $1000.
- Finalmente, propicie una discusión grupal sobre por qué varía el interés según el plazo de pago y esto qué ventajas y desventajas presenta para la empresa que otorga el crédito y para el cliente.

5. Propuesta de evaluación: Ejercicios de seguimiento

Evaluar este tipo de conocimiento matemático es una tarea compleja. La idea de la evaluación en las matemáticas vistas como prácticas sociales no es la misma que en la del modelo autónomo. En las prácticas sociales, la evaluación tiene que ver con el contexto en que se está llevando a cabo la práctica matemática. Por ejemplo, el mismo contexto nos daría retroalimentación si nos estafan al momento de hacernos menos descuento del que debería ser; en el mejor de los casos, el propio contexto y un buen manejo de la información como del cálculo de los porcentajes nos permitiría darnos cuenta rápidamente del fraude. Aunque es complicada la evaluación, el docente puede recurrir a la modelización de ciertas situaciones y plantear problemas a sus alumnos que se asemejen al tipo de problemas que se pueden encontrar en la vida cotidiana. Una posibilidad de evaluación es la de formular tareas poco familiares en donde se requiera transferir el conocimiento, con el fin de desencadenar procesos creativos de resolución de problemas o solucionar éstos mediante la distinción de conceptos similares.

Como propuesta de evaluación se muestra a continuación una serie de problemas con diferentes sugerencias de solución y trabajo en el aula. El objetivo es que los alumnos expongan sus conocimientos. De este modo, el docente podría analizar las producciones de los alumnos y evaluar sus avances. (Se sugiere que el profesor los resuelva antes de ver los comentarios).

Ejercicios de evaluación

1. En el Buen Fin de este año, Alejandra se quería comprar una playera de futbol americano. La playera estaba anunciada a un precio de \$550 ya con el 20% de descuento. Una semana antes, Alejandra vio la misma playera en el mismo lugar y costaba \$650. ¿Cuánto costaba originalmente la playera que iba a comprar Alejandra? ¿Cambió de precio bruto (es decir, antes de aplicar el descuento) de una semana a otra?

Comentarios

En este problema, la idea es notar que muchas veces los precios que aparecen en las tiendas aumentan un poco antes de que hagan descuentos. La dificultad de esto radica en notar que \$550 es en realidad el 80%, y los posibles errores serían:

Calcular el 20% de \$550 y aumentárselo a \$550 para obtener el precio original. Esto da un resultado de \$660

Similar al anterior pero más directo. Calcular el 120% de \$550. Esto da \$660 también.

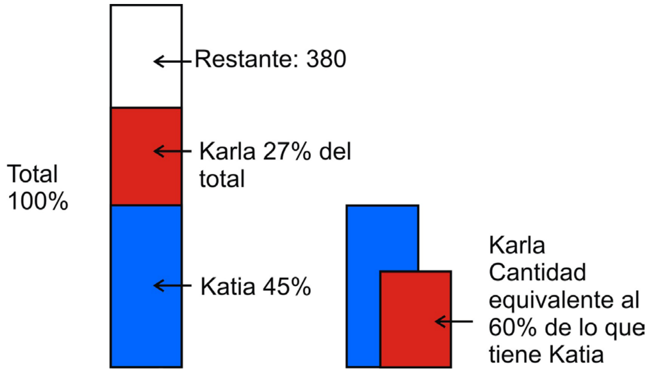
En realidad, si nos convencemos de que \$550 es el 80% (porque es el costo inicial menos el 20%) notamos que el precio original es de \$687.5. Por lo tanto, el precio neto aumentó \$37.5 de una semana a otra.

2. En la feria, Katia y Karla ganaron un premio. Katia se quedó con el 45% del premio. Karla se quedó con una cantidad equivalente al 60% de lo que ganó Katia. Si sobraron \$380, ¿de cuánto fue el premio?

Comentarios

Este problema tiene la complejidad de calcular cuánto porcentaje del total obtendrá Karla. Sabemos que Katia se quedó con 45% del premio, y queremos saber cuánto es 60% de 45%. El posible error que se vislumbra al momento de que los alumnos resuelvan el problema es pensar que el 60% es del restante 55% y obtengan así que el 60% de 55% es 33% del total.

Para calcular 60% de 45%, se trabaja como si 45% fuese el 100%. Por lo tanto, 60% de 45% es 27%. En el siguiente esquema se muestra dicho cálculo:

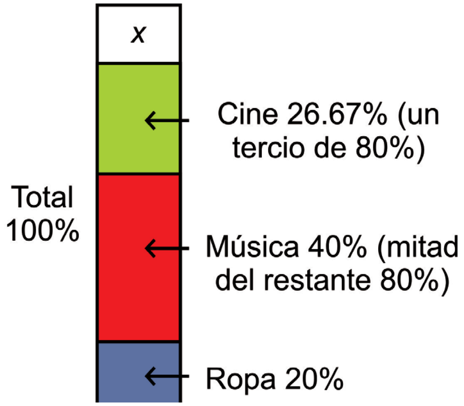


Ahora bien, ¿cómo calcular el total? Aquí puede aparecer otro error en el cálculo de los alumnos: ignorar que $380 son en realidad 28% del total. Sabiendo esto, podemos calcular que 100% es $1357.14. Es importante registrar lo que los alumnos van pensando y cómo lo registran, es aquí en donde el docente puede evaluar si entendieron que para calcular el 60% de 45% se requiere pensar que 45% es un nuevo 100% parcial. También se puede registrar si se concibe que el restante es en realidad una sección (28%) del total. Estos dos puntos son clave para evaluar la producción del estudiante.

3. Una manera de ahorrar es haciendo una buena planeación de lo que gastamos. Por ejemplo, una persona gastó en ropa 20% del total que tenía ahorrado; del resto invirtió la mitad en música y un tercio en ir al cine. Del sobrante, compró una golosina con el 10%. ¿Si al final se quedó con $176, cuánto gastó en ropa?

Comentarios

Una manera de resolver este problema es haciendo un esquema parecido al ejercicio anterior, con un rectángulo que represente el 100% de lo que tenía ahorrado. Así, 20% sería para ropa, del restante 80% la mitad (40%) para música, y un tercio de ese 80% (es decir 80/3=26.6%) para ir al cine:



Del restante (*x*) se quitaría el 10% y eso sería $176.

El problema abre la posibilidad de que los alumnos exploren y recurran a todo el conocimiento sobre porcentajes. Es útil sugerirles que elaboren un diagrama que represente el total para de ahí ir obteniendo los demás porcentajes.

Resolviendo el problema, en este caso, si $176 fue la cantidad que la persona conservó al final, ésta es el resultado de *x* - 10%*x*, por lo tanto, se considera $176 como el 90% de x, donde x vale $195.56.

Entonces *x* es $195.56 y representa 13.33% del total, por ser 100 - (26.67 + 40 + 20). Por lo tanto, si $195.96 es 13.33%, la cantidad original sería $1467.03, y lo gastado en ropa correspondería a $293.93.

4. Se depositaron $3000 en el banco por 3 años. Cada año se gana un interés de 8% del depósito original. ¿Cuánto se ganó en total?

Comentarios

Por cada año invertido se gana 8% de los $3000, que son $240. Por lo tanto, en tres años se ganarían $720. Entonces en total serían $3720. El principal obstáculo de los alumnos es

diferenciar entre el interés que reditúa sobre el capital invertido o sobre el capital que se genera cada periodo. Será útil hacer explícito con qué tipo de rédito se trabaja.

5. El precio original de un producto es de $260. Si al año siguiente el precio del mismo producto se elevó en 5%, ¿cuál será el precio? El precio al año siguiente bajó 5% y se mostró que no regresó a $260. ¿Cómo es que ocurre esta aparente paradoja?

   Comentarios

   Lo que parece ser una contradicción resulta de pensar que se mantiene $260 como el 100% que sirve de base para el cálculo en ambos años, sin notar que para el segundo año el 100% es igual a $260 + (5% de $260) = $273. Entonces, el 5% de esa cantidad es $13.65; por lo que el nuevo precio es de $259.35.

6. Durante cierto año de la última década, en la Ciudad de México se invirtieron 13.64 millones de pesos en dar mantenimiento a las calles y construir nuevas vialidades. En ese mismo periodo se invirtieron 3.41 millones de pesos en renovar, ampliar y dar mantenimiento al transporte público. Por otra parte, en la Ciudad de México habitan 8851 millones de personas, de las cuales 1770 millones cuentan con al menos un auto para transportarse, mientras que los demás usan el transporte público.

   - Tomando en cuenta que el mejoramiento de las vialidades beneficia principalmente a los automovilistas, ¿es equitativa la proporción entre la inversión en transporte público y la que se hace para construir o reparar vialidades, respecto de la proporción entre la población que usa el transporte público y la que usa automóvil?
   - ¿Se puede considerar que esta situación es justa? ¿Por qué?
   - Considerando que esta situación es recurrente en distintas ciudades del país, ¿qué acciones deben realizar las

autoridades y la ciudadanía para atenderla?

Comentarios

Se sugiere expresar la proporción entre cantidades invertidas en transporte público y vialidades, así como la proporción entre habitantes beneficiados como porcentajes, tal como se haría en un comunicado público (oficial o de prensa) para facilitar la discusión.

En el primer caso, se suman las cantidades para obtener el 100%, lo cual da un total de 17.05 millones invertidos en infraestructura para autos y en transporte público. De ahí se deriva que la inversión en vialidades que benefician a los automovilistas es el 80%, mientras que la inversión en transporte público es del 20%. En cambio, los porcentajes se invierten cuando se calcula la proporción de número de habitantes beneficiados: la población que dispone de automóvil es del 20% y la población que utiliza el transporte público es del 80%

Nota
Los datos son cercanos a lo que sucede en la realidad, pero se ajustaron para facilitar la resolución del problema. Si los alumnos se interesan en el tema para informarse y opinar sobre lo que sucede en su ciudad, apóyelos en la búsqueda de información válida y confiable.

6. Trabajos citados

Brousseau, G. (1986). “Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques”, en *Recherches en Didactique des Mathématiques* , *7* (2), 33-115.

Ghose, M. (2007). *Exploring the Everyday. Ethnographic Approaches to Literacy and Numeracy.* New Delhi: Nirantar.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1955). *De la logique de l’enfant a la logique de l’adolescent.* París, France: PUF.

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

Subsecretaría de Educación Media Superior

www.sems.gob.mx